

La conjecture de Syracuse enfin démontrée ? : Étude mathématique détaillée concernant la conjecture de Syracuse via une approche inédite et novatrice — le cadre MSP²

The Syracuse Conjecture Finally Proved? : Detailed Mathematical Study of the Syracuse Conjecture Using an Original and Innovative Approach — the MSP² Framework

Sousa Pereira Mario

Ingénieur diplômé automatisme et électrique

CNAM

France

M. Mazzoni Enzo

Ingénieur diplômé en génie mécanique

ESIPE

France

Date de soumission : 04/08/2026

Date d'acceptation : 27/08/2026

Pour citer cet article :

Sousa. P. M. & Mazzoni E. (2026) « La conjecture de Syracuse enfin démontrée ? : Étude mathématique détaillée concernant la conjecture de Syracuse via une approche inédite et novatrice — le cadre MSP² », Revue Internationale du Chercheur «Volume 7 : Numéro 3» pp : 1071-1129

Résumé

Cet article introduit MSP^2 (écriture regroupée des étapes de Syracuse), une reformulation de la conjecture de Syracuse (Collatz) qui regroupe chaque étape impaire suivie de sa division par 2 inévitable en une seule opération. Cette écriture fait apparaître deux familles d'arbres inverses (racines $6q+1$ et $6q-1$), dont on établit l'exhaustivité vis-à-vis des vols impairs, ainsi qu'un Tableau Générateur (TG) qui organise systématiquement les changements de variable et les tests de parité associés à ces arbres. On y démontre plusieurs lois de périodicité (verticale, suivant l'axe Z, d'entrée et de sortie), une réduction de l'étude globale à des représentants canoniques, la construction récursive des triangles internes du TG, ainsi qu'une première borne finie — et deux optimisations successives de cette borne — garantissant la couverture progressive d'intervalles d'entiers croissants. Le cadre est enfin étendu aux entiers négatifs. Les résultats démontrés sont clairement distingués, tout au long du texte, des pistes encore ouvertes : la formalisation complète de la récurrence structurelle des raccords du Tableau Générateur, nécessaire à une preuve inconditionnelle de la conjecture pour tous les entiers, reste un travail en cours.

Mots-clés : conjecture de Syracuse, conjecture de Collatz, MSP^2 , Tableau Générateur, arbres inverses, périodicité, couverture, systèmes dynamiques discrets.

Abstract

This article introduces MSP^2 , a regrouped rewriting of the Syracuse (Collatz) steps that merges each odd step with its inevitable subsequent halving into a single operation. This rewriting reveals two families of inverse trees (roots $6q+1$ and $6q-1$), whose exhaustiveness with respect to odd flights is established, together with a Generator Table (TG) that systematically organizes the variable changes and parity tests attached to these trees. Several periodicity laws are proved (vertical, along the Z-axis, entry and exit periods), along with a reduction of the global study to canonical representatives, the recursive construction of the TG's internal triangles, and a first finite bound — together with two successive optimizations — guaranteeing progressive coverage of growing integer ranges. The framework is finally extended to negative integers. Proven results are clearly distinguished throughout from open directions: the complete formalization of the structural recurrence of the Generator Table's connections, required for an unconditional proof of the conjecture for all integers, remains ongoing work.

Keywords : Syracuse conjecture, Collatz conjecture, MSP^2 , Generator Table, inverse trees, periodicity, coverage, discrete dynamical systems.

1. Introduction

Le problème de Syracuse étudie l'itération qui, à un entier positif, associe $n/2$ lorsque n est pair et $3n+1$ lorsque n est impair. Le présent travail introduit une écriture regroupée, notée MSP^2 , destinée à rendre visibles certaines structures arithmétiques et géométriques des trajectoires.

L'objectif n'est pas de modifier la dynamique de Syracuse, mais d'en regrouper certaines opérations afin d'étudier les cycles impair-vers-impair, leurs familles, les arbres inverses et un Tableau Générateur (TG) qui organise les changements de variables et les parités.

2. Définition de MSP^2

2.1. Règle paire

Si le nombre courant N est pair, une étape MSP^2 est simplement :

$$N \rightarrow N/2.$$

Cette opération est répétée, une étape à la fois, tant que le résultat reste pair.

2.2. Règle impaire

Soit M un entier impair positif. Écrivons de manière unique

$$M + 1 = 2^r u, \quad r \geq 1, \quad u \text{ impair.}$$

Une étape impaire élémentaire de MSP^2 peut être lue sous la forme regroupée : ajouter 1, diviser par 2, multiplier par 3, puis retrancher 1. Lorsque plusieurs divisions par 2 sont disponibles dans $M+1$, plusieurs étapes impaires élémentaires peuvent se succéder avant l'apparition d'un nombre pair.

Après r étapes impaires successives :

$$M_r + 1 = 3^r u, \text{ donc } M_r = 3^r u - 1,$$

qui est pair.

2.3. Équivalence avec Syracuse

Une étape impaire MSP^2 regroupe une étape impaire de Syracuse et l'étape paire inévitable qui la suit. Le travail est mené principalement sur les impairs ; tout entier pair atteint en un nombre fini de divisions par 2 un entier impair.

2.4. Parent, enfant et cycle C_{MSP^2}

Dans le sens direct, l'impair de départ est appelé parent et l'impair atteint à la fin du cycle est appelé enfant.

On appelle cycle C_MSP^2 la succession complète qui part d'un impair, comporte un nombre fini d'étapes impaires MSP^2 , puis au moins une étape paire, et se termine au prochain impair.

2.5. Fin d'un cycle

À la fin de la phase impaire, on obtient $3^r u - 1$, qui n'est pas divisible par 3. Les divisions par 2 qui suivent ne peuvent introduire un facteur 3. Le nouvel impair n'est donc pas divisible par 3. Tout impair étant congru à 1, 3 ou 5 modulo 6, l'arrivée d'un cycle est nécessairement de la forme :

$$6q + 1 \text{ ou } 6q - 1.$$

3. Classification des impairs et familles de départ

Pour tout impair n , le nombre exact de facteurs 2 dans $n+1$ détermine une classe unique. Si $n+1 = 2^r(2k+1)$, alors

$$n = 2^{r+1} k + 2^r - 1.$$

On obtient successivement les familles $4k+1$, $8k+3$, $16k+7$, $32k+15$, $64k+31$, etc. Ces familles sont disjointes et couvrent tous les impairs positifs.

4. Construction des arbres MSP^2

Les fins de cycles étant de type $6q+1$ ou $6q-1$, on construit deux arbres inverses correspondant à ces deux familles. Les remontées utilisent les puissances de 2 qui rendent possible la division par 3.

4.1. Famille $6q+1$

Pour $N = 6q+1$, les multiplicateurs admissibles sont les puissances impaires de 2 : $2, 2^3, 2^5, 2^7, \dots$; après multiplication, l'ajout de 1 fournit un multiple de 3.

4.2. Famille $6q-1$

Pour $N = 6q-1$, les multiplicateurs admissibles sont $4, 4^2, 4^3, \dots$.

4.3. Vocabulaire géométrique

Le tronc porte les niveaux en puissances de 2. À chaque niveau est associé un nœud $+1$. Une branche relie ce nœud $+1$ aux feuilles obtenues par remontée inverse. Les deux arbres ont la même organisation générale, avec des règles propres à leurs familles.

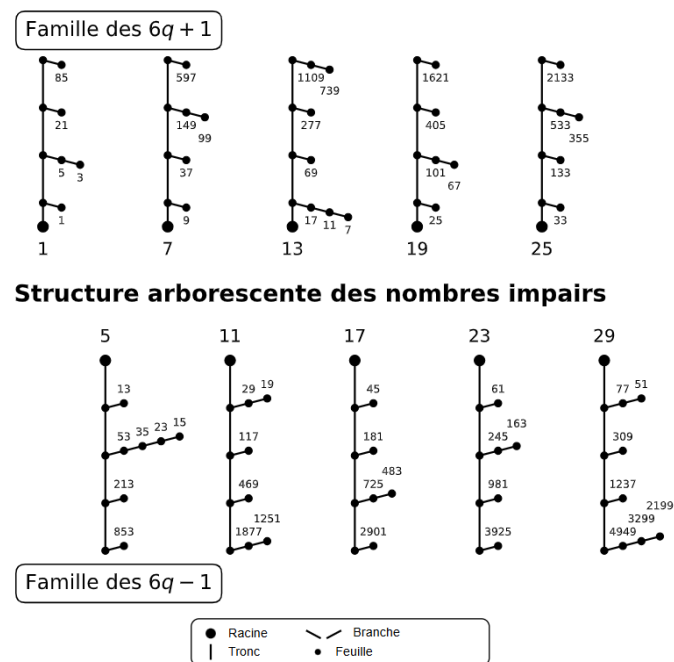


Figure N°1 : Construction et organisation des arbres MSP²

Source : élaboration des auteurs

4.4. Lemme d'exhaustivité des vols impairs

Énoncé. Les deux arbres MSP² de racines de type $6q+1$ et $6q-1$ contiennent l'ensemble des cycles MSP² possibles issus des entiers impairs positifs. Par concaténation de ces cycles, ils contiennent donc l'ensemble des vols MSP² issus des entiers impairs positifs. Aucun vol impair n'est extérieur à cette construction.

Démonstration. Soit M un entier impair positif quelconque. Par définition de MSP², on écrit de manière unique $M + 1 = 2^r u$, $r \geq 1$, u impair. Après les r étapes impaires MSP² successives, on obtient $M_r = 3^r u - 1$, qui est pair. On effectue alors les divisions successives par 2 jusqu'à atteindre le prochain impair : cette succession constitue exactement un cycle C_{MSP^2} .

Appelons N l'impair obtenu à la fin de ce cycle. Puisque $M_r = 3^r u - 1$ n'est pas divisible par 3, et que les divisions ultérieures par 2 ne peuvent introduire de facteur 3, N n'est pas divisible par 3. Or tout entier impair est congru modulo 6 à 1, 3 ou 5 ; le cas 3 modulo 6 étant exclu, nécessairement $N = 6q + 1$ ou $N = 6q - 1$. C'est précisément le résultat utilisé pour construire les deux arbres MSP² de la Figure 1.

Considérons le cycle dans le sens inverse. Pour une arrivée $N = 6q+1$, les remontées entières admissibles sont celles définies par les puissances impaires de 2 ; pour une arrivée $N = 6q-1$, elles sont celles définies par les puissances de 4 : ce sont précisément les deux règles qui

définissent les deux arbres inverses MSP^2 . Le cycle considéré, se terminant nécessairement dans l'une des deux familles $6q \pm 1$, apparaît donc nécessairement dans l'un des deux arbres.

M étant un impair positif quelconque, tout cycle MSP^2 issu d'un impair appartient à l'un des deux arbres MSP^2 . À la fin du cycle, N est lui-même impair et devient le point de départ d'un nouveau cycle MSP^2 ; on lui applique exactement le même raisonnement, et son cycle suivant appartient à nouveau à l'un des deux arbres. Un vol MSP^2 étant une concaténation de cycles $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow \dots$, et chacun de ces cycles appartenant nécessairement à l'un des deux arbres, le vol entier est représenté, cycle après cycle, par la construction MSP^2 :

$$\{\text{vols } MSP^2 \text{ issus des impairs positifs}\} = \{\text{vols engendrés par les deux arbres } MSP^2\}.$$

Aucun vol impair n'est oublié ; aucun vol arithmétique étranger à MSP^2 n'est ajouté.

Portée du lemme. Ce lemme intervient avant toute utilisation du Tableau Générateur : il ferme l'univers des vols au niveau de MSP^2 lui-même, la définition de MSP^2 et les deux arbres de la Figure 1 suffisant à représenter tous les cycles possibles issus des impairs positifs. Ainsi, si une propriété est ensuite démontrée pour toutes les feuilles et toutes les ramifications de ces deux arbres, l'exhaustivité qui précède garantit qu'elle porte sur tous les cycles possibles et, par concaténation, sur tous les vols MSP^2 issus des entiers impairs positifs.

5. Feuilles, racines et reproduction des arbres

Les feuilles se répartissent suivant trois types : $6q+1$, $6q-1$ et $6q+3$. Lors de la remontée, les feuilles de type $6q+1$ et $6q-1$ peuvent à leur tour jouer le rôle de racines. Le type $6q+3$ constitue le cas qui disparaît de la poursuite entière de la remontée.

Ainsi, après élimination du type $6q+3$, chaque feuille admissible devient la racine d'un nouvel arbre. La structure se reproduit donc de génération en génération, sans que les arbres soient numériquement identiques : ils appartiennent aux mêmes types structuraux mais leurs paramètres changent.

Même si un arbre d'une génération ultérieure fait réapparaître des feuilles du type $6q+3$, cela ne modifie pas le mécanisme : ces feuilles sont à nouveau éliminées de la remontée entière.

6. Observations sur les feuilles

6.1. Répartition verticale des types

En parcourant verticalement les feuilles, les trois types $6q+1$, $6q-1$ et $6q+3$ apparaissent périodiquement. Cette répartition est ensuite retrouvée dans les générations successives.

6.2. Rapport le long d'une branche

Le long d'une branche, les positions successives des feuilles suivent le rapport $3/2$. Le point du tronc sert de référence géométrique ; il ne doit pas lui-même être confondu avec une feuille.

6.3. Périodes des feuilles

Pour l'arbre $6q+1$, la première période de feuilles est 8 ; pour l'arbre $6q-1$, elle est 16. En hauteur, la période est multipliée par 4 à chaque niveau. Vers le fond de l'arbre (axe Z), elle est multipliée par 2.

$6q+1 : 8, 32, 128, \dots$ $6q-1 : 16, 64, 256, \dots$

De cette organisation se déduit une distribution par puissances de 2 : une période de 8, deux périodes de 16, trois périodes de 32, quatre périodes de 64, et ainsi de suite dans l'organisation considérée.

6.4. Périodes de sortie des racines

Lorsque l'on monte verticalement dans une même colonne de feuilles, la périodicité des racines de sortie reste inchangée : elle reste de période 6. En revanche, lorsqu'on avance vers le fond de l'arbre, la période des racines de sortie est multipliée par 3.

6.5. Divisibilité maximale par colonne

Les feuilles de la première colonne sont seulement divisibles par 2 ; celles de la deuxième sont au maximum divisibles par 4 ; celles de la troisième au maximum par 8 ; plus généralement, la borne de divisibilité suit la puissance de 2 associée au rang de la colonne.

Ces observations ne prétendent pas être exhaustives : la structure permet d'en formuler beaucoup d'autres. Nous retenons ici celles qui sont utiles à la suite de l'étude.

7. Démonstrations relatives aux feuilles

7.1. Types de feuilles

Les formules des feuilles, réduites modulo 6, produisent successivement les trois classes $6q+1$, $6q-1$ et $6q+3$. La périodicité verticale de cette répartition se démontre par récurrence sur le rang de la feuille et sur la colonne.

7.2. Feuilles terminales

Une feuille de type $6q-1$, dans le sens considéré, possède obligatoirement le parent entier imposé par la règle de remontée ; elle ne peut donc pas être terminale. Par conséquent, les deux autres types identifiés par la construction sont les seuls candidats terminaux dans ce cadre.

7.3. Placement des feuilles sur une branche

Le rapport $3/2$ entre feuilles successives d'une même branche résulte directement de l'opération inverse élémentaire et se propage par récurrence. Il fixe le placement des feuilles sur chaque branche. Le point du tronc constitue le point de départ géométrique ; il joue le rôle de référence mais n'est pas lui-même une feuille.

7.4. Formule générale verticale

La reproduction verticale des familles de feuilles peut être regroupée dans une seule relation de récurrence. Si j désigne le rang de la colonne et U_n la valeur considérée au niveau n , la formule générale validée est :

$$U_{n+1} = (3^j - 2^j) \cdot (4^{3^{j-1}} - 1) / 3^j + 4^{3^{j-1}} U_n$$

Cette relation se démontre par récurrence. Elle retrouve les premiers cas déjà calculés :

$$j = 1 : U_{n+1} = 4U_n + 1$$

$$j = 2 : U_{n+1} = 64U_n + 35$$

La même formule s'applique à tous les rangs de feuilles considérés et aux deux types de racines. Elle clôt la description de la reproduction verticale des feuilles.

7.5. Démonstration de la périodicité des feuilles en hauteur

Pour l'arbre de type $6q+1$, la première période est 8. Lorsque l'on passe au niveau vertical suivant, la période est multipliée par 4. On obtient donc :

$$8, 32, 128, 512, \dots$$

Au rang vertical n :

$$P_n = 8 \cdot 4^n$$

La propriété se démontre par récurrence : si $P_n = 8 \cdot 4^n$, alors $P_{n+1} = 4P_n = 8 \cdot 4^{n+1}$.

Pour l'arbre de type $6q-1$, le raisonnement est identique avec une période initiale égale à 16 :

$$P_n = 16 \cdot 4^n$$

Ainsi, dans le sens vertical, la période des feuilles est multipliée par 4 à chaque niveau pour les deux types d'arbres.

7.6. Démonstration de la périodicité vers le fond de l'arbre

Considérons une feuille quelconque et avançons vers le fond de l'arbre, suivant l'axe Z. À chaque passage à la colonne suivante, la période des feuilles est multipliée par 2.

$$P_{j+1} = 2P_j$$

Par récurrence, si P_0 désigne la période de départ :

$$P_j = 2^j P_0$$

7.7. Multiplicité des périodes

La duplication précédente conduit successivement à une période de 8, deux périodes de 16, trois périodes de 32, quatre périodes de 64, et ainsi de suite.

$$8 : 1, 16 : 2, 32 : 3, 64 : 4, \dots$$

Autrement dit, la multiplicité augmente d'une unité à chaque nouvelle puissance de 2. Si l'on note la période de rang r par

$$P_r = 8 \cdot 2^r,$$

alors cette période apparaît exactement $r + 1$ fois.

7.8. Relation entre périodes d'entrée et périodes de sortie

Dans une même colonne verticale, lorsque la période des feuilles est multipliée par 4, la périodicité des racines de sortie reste inchangée. Les racines de sortie restent espacées suivant la période 6.

verticalement : période des feuilles $\times 4$; période de sortie $\times 1$

En revanche, lorsque l'on avance vers le fond de l'arbre, la période des feuilles est multipliée par 2 tandis que la période des racines de sortie est multipliée par 3.

vers Z : période des feuilles $\times 2$; période de sortie $\times 3$

Cette relation entre période d'entrée et période de sortie sera utilisée ensuite pour les implications sur les cycles et la répétitivité des profils de vol.

7.9. Définition et lemme de la feuille terminale

Définition. Une feuille terminale d'un arbre MSP^2 est une feuille qui ne possède pas d'antécédent impair entier permettant de poursuivre l'arbre dans le sens inverse. Pour une feuille de valeur N , l'existence d'un tel antécédent impair exige que $N + 1$ soit divisible par 3. Feuille terminale $\Leftrightarrow$ absence d'antécédent impair entier.

Lemme (type des feuilles terminales). Soit une feuille de type $N = 6q - 1$. Alors $N + 1 = 6q = 3(2q)$ est divisible par 3 : la condition permettant l'existence d'un antécédent est donc satisfaite, et une feuille de type $6q - 1$ ne peut pas être terminale. Or les feuilles MSP^2 appartiennent aux trois types $6q + 1$, $6q - 1$ et $6q + 3$; le type $6q - 1$ étant exclu, il reste nécessairement les types $6q + 1$ ou $6q + 3$.

Toute feuille terminale est de type $6q + 1$ ou $6q + 3$. Ce résultat précise le §7.2 : les feuilles de type $6q - 1$ possèdent toujours un parent, ce qui explique pourquoi seuls les deux autres types sont candidats terminaux.

7.10. Rotation des trois types de feuilles au rang 1

Considérons les feuilles de rang 1, c'est-à-dire les premières feuilles situées immédiatement à côté du tronc d'un arbre MSP^2 . Le passage d'une feuille de rang 1 à la suivante est donné par $F_{n+1} = 4F_n + 1$. Il suffit d'étudier cette transformation modulo 6 pour les trois types possibles :

- $F_n = 6q + 1 : F_{n+1} = 4(6q+1)+1 = 24q+5 = 6(4q+1) - 1 \rightarrow \text{type } 6q' - 1 ;$
- $F_n = 6q - 1 : F_{n+1} = 4(6q-1)+1 = 24q-3 = 6(4q-1) + 3 \rightarrow \text{type } 6q' + 3 ;$
- $F_n = 6q + 3 : F_{n+1} = 4(6q+3)+1 = 24q+13 = 6(4q+2) + 1 \rightarrow \text{type } 6q' + 1.$

On obtient ainsi, pour trois feuilles successives, la rotation

$$6q + 1 \rightarrow 6q' - 1 \rightarrow 6q'' + 3 \rightarrow 6q''' + 1 \rightarrow \dots$$

La transformation étant la même à chaque passage, les trois types se répètent périodiquement dans le même ordre : parmi trois feuilles consécutives de rang 1, il y a exactement une feuille de type $6q + 1$, une de type $6q - 1$ et une de type $6q + 3$.

7.11. Rotation des trois types de feuilles à tout rang

Énoncé. Pour tout rang $r \geq 1$, les feuilles d'un même rang appartiennent aux trois types $6q + 1$, $6q - 1$ et $6q + 3$, et ces trois types se succèdent cycliquement ; parmi trois feuilles consécutives d'un même rang, chacune des trois classes apparaît exactement une fois.

Démonstration par récurrence.

Initialisation (rang 1). D'après le §7.10, $U_{n+1} = 4U_n + 1$ donne modulo 6 : $1 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$, soit $6q+1 \rightarrow 6q'-1 \rightarrow 6q''+3 \rightarrow 6q''' + 1$. La propriété est vraie au rang 1.

Structure au rang r. Au rang r, le trajet reliant deux feuilles successives de même rang est constitué de r opérations MSP² dans le sens direct, d'une remontée paire centrale, puis de r opérations MSP² dans le sens inverse. Le nombre d'étapes paires centrales est $E_r = 2 \cdot 3^{r-1}$, de sorte que la remontée centrale correspond à une multiplication par $2^{(2 \cdot 3^{r-1})}$. Lorsqu'on passe du rang r au rang r+1, une opération MSP² est ajoutée de chaque côté et le nombre d'étapes paires centrales est multiplié par 3 : $E_{r+1} = 3E_r = 2 \cdot 3^r$. La structure du trajet est donc reproduite à chaque rang, avec la même symétrie entre opérations directes et inverses.

Calcul général de la rotation. La relation verticale générale entre deux feuilles successives de rang r s'écrit

$$U_{n+1} = 4^{(3^{r-1})}U_n + (3^r - 2^r) \cdot (4^{(3^{r-1})} - 1)/3^r,$$

qui redonne bien $r = 1$: $U_{n+1} = 4U_n + 1$, et $r = 2$: $U_{n+1} = 64U_n + 35$ (cf. §7.4). Pour tout $r \geq 1$, $4^{(3^{r-1})} \equiv 4 \pmod{6}$, et le terme constant vaut modulo 6 : 1 si r est impair, 5 si r est pair.

- *Rang impair* : $U_{n+1} \equiv 4U_n + 1 \pmod{6}$, d'où $1 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$, soit $6q+1 \rightarrow 6q'-1 \rightarrow 6q''+3 \rightarrow 6q''' + 1$.
- *Rang pair* : $U_{n+1} \equiv 4U_n + 5 \pmod{6}$, d'où $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1$, soit $6q+1 \rightarrow 6q'+3 \rightarrow 6q''-1 \rightarrow 6q''' + 1$.

L'ordre de rotation s'inverse donc entre rangs impair et pair, mais les trois classes restent présentes exactement une fois dans chaque groupe de trois feuilles consécutives.

Conclusion. La propriété étant vraie au rang 1 et la relation générale montrant qu'à tout rang la transformation induit une permutation cyclique des trois classes modulo 6, elle est vraie pour tout rang $r \geq 1$.

7.12. Corollaire — multiplicité des périodes

Reprenant le §7.7, pour $P_r = 8 \cdot 2^r$, la période P_r apparaît exactement $r + 1$ fois.

Démonstration. L'arbre $6q+1$ fournit verticalement les périodes 8, 32, 128, ... et l'arbre $6q-1$ fournit 16, 64, 256, ... Chaque déplacement suivant l'axe Z multiplie une période existante par 2. Ainsi : 8 apparaît une fois ; 16 apparaît une deuxième fois par déplacement suivant l'axe Z ; 32 apparaît à partir du niveau vertical de l'arbre $6q+1$ puis par les déplacements suivant l'axe

Z, soit trois occurrences au total ; 64 apparaît à partir du niveau vertical de l'arbre $6q-1$ puis par les différents déplacements suivant l'axe Z, soit quatre occurrences ; et le même mécanisme se poursuit à chaque puissance de 2. La multiplicité augmente donc d'une unité à chaque nouvelle période : 1, 2, 3, 4, 5, ... Par conséquent, $P_r = 8 \cdot 2^r \Rightarrow \text{multiplicité} = r + 1$.

7.13. Démonstration détaillée — évolution de la période suivant l'axe Z

Ce paragraphe complète le §7.6 par une démonstration explicite par récurrence. Lorsque l'on va vers le fond de la branche suivant l'axe Z, on ajoute un cycle MSP² impair supplémentaire, ce qui introduit un facteur 2 dans la période d'entrée : $P_{n+1} = 2P_n$.

Initialisation. $P_0 = 8$.

Hérédité. Supposons $P_n = 8 \cdot 2^n$. Le passage au niveau suivant ajoute un cycle impair supplémentaire, donc $P_{n+1} = 2P_n = 2(8 \cdot 2^n) = 8 \cdot 2^{n+1}$: la propriété est vraie au rang suivant.

Par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $P_n = 8 \cdot 2^n$, soit $8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow \dots$.

7.14. Démonstration détaillée — périodes des deux arbres

Ce paragraphe complète le §7.5 par une démonstration explicite par récurrence pour chacun des deux arbres.

Arbre de type $6q + 1$. Au premier étage, $P_0 = 8$. Supposons qu'à l'étage n , $P_n = 8 \cdot 4^n$. Le passage à l'étage supérieur comporte deux étapes paires MSP² parcourues en sens inverse ; une étape paire directe étant une division par 2, son parcours en sens inverse est une multiplication par 2, donc deux étapes paires inverses donnent $\times 2 \times 2 = \times 4$: $P_{n+1} = 4P_n = 4(8 \cdot 4^n) = 8 \cdot 4^{n+1}$. Par récurrence, pour tout $n \geq 0$, $P_n = 8 \cdot 4^n$, soit 8, 32, 128, 512, ...

Arbre de type $6q - 1$. Au premier étage, $P_0 = 16$. Le même raisonnement donne $P_{n+1} = 4P_n = 4(16 \cdot 4^n) = 16 \cdot 4^{n+1}$, donc $P_n = 16 \cdot 4^n$ pour tout $n \geq 0$, soit 16, 64, 256, 1024, ...

Les deux arbres obéissent à la même règle — chaque montée d'un étage multiplie la période par 4, ce facteur provenant directement des deux étapes paires MSP² parcourues en sens inverse ($\times 2$ puis $\times 2$) — et ne diffèrent que par leur période initiale : 8 pour l'arbre $6q+1$, 16 pour l'arbre $6q-1$.

7.15. Lemme — période d'entrée associée à un cycle MSP²

Soit un cycle MSP² comportant exactement n étapes. La période d'entrée associée à ce cycle est $P_{\text{entrée}} = 2^{n+1}$: la période d'entrée est la puissance de 2 dont l'exposant est égal au nombre d'étapes du cycle augmenté de 1.

Par exemple, pour un cycle comportant 2 étapes, $P_{\text{entrée}} = 2^3 = 8$ (cas associé à 1) ; pour un cycle comportant 4 étapes, $P_{\text{entrée}} = 2^5 = 32$ (cas associé à 5).

Plus généralement, chaque étape supplémentaire multiplie la période d'entrée par 2 : si $P_n = 2^{n+1}$, alors $P_{n+1} = 2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2P_n$. Par récurrence, $P_{\text{entrée}} = 2^{n+1}$ pour tout nombre fini n d'étapes du cycle.

7.16. Lemme — relation entre périodes d'entrée et de sortie d'un cycle

Ce lemme précise le §7.8 en reliant explicitement le nombre d'étapes impaires et paires d'un cycle à ses périodes d'entrée et de sortie. Considérons un cycle MSP² déterminé et notons a le nombre d'étapes MSP² impaires, e le nombre d'étapes paires, $n = a + e$ le nombre total d'étapes.

Une étape impaire MSP² a pour coefficient multiplicatif $3/2$, une étape paire pour coefficient $1/2$. Pour deux nombres qui suivent exactement le même cycle, une différence initiale Δ devient à la sortie $\Delta_{\text{sortie}} = (3^a/2^n)\Delta$. La période d'entrée d'un cycle de n étapes étant $P = 2^{n+1}$, deux nombres séparés d'une période P ont pour différence de sortie $P_{\text{sortie}} = (3^a/2^n) \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot 3^a$: la période de sortie ne dépend donc que du nombre d'étapes impaires du cycle.

Exemples : 1 et 9 = 1+8 $\rightarrow$ différence de sortie $7-1 = 6 = 2 \cdot 3$; 5 et 37 = 5+32 $\rightarrow$ différence de sortie 6.

Déplacement vertical (entrée $\times 4$, sortie inchangée). Une montée verticale ajoute deux étapes paires : $a_{r+1} = a_r$, $n_{r+1} = n_r + 2$, donc $P_{r+1} = 2^{n_r+3} = 4P_r$, tandis que $P_{\text{sortie},r+1} = 2 \cdot 3^{a_r+1} = 2 \cdot 3^{a_r} = P_{\text{sortie},r}$. Verticalement : entrée $\times 4$, sortie $\times 1$ (initialisation $8 \rightarrow 32 \rightarrow 128 \rightarrow \dots$, sortie 6, 6, 6, ...).

Déplacement suivant l'axe Z (entrée $\times 2$, sortie $\times 3$). Une avancée vers le fond de l'arbre ajoute une étape impaire supplémentaire : $a_{j+1} = a_j + 1$, $n_{j+1} = n_j + 1$, donc $P_{j+1} = 2^{n_j+2} = 2P_j$, et $P_{\text{sortie},j+1} = 2 \cdot 3^{a_j+1} = 3P_{\text{sortie},j}$. Suivant l'axe Z : entrée $\times 2$, sortie $\times 3$ (exemple : $5 \leftrightarrow 37$ a une période de sortie 6, $3 \leftrightarrow 67$ a une période de sortie $18 = 3 \times 6$, puis $18 \rightarrow 54 \rightarrow 162 \rightarrow \dots$).

Les deux étapes paires supplémentaires verticales augmentent uniquement la puissance de 2 de la période d'entrée, tandis qu'une étape impaire supplémentaire suivant l'axe Z augmente

simultanément la puissance de 2 de la période d'entrée et la puissance de 3 de la période de sortie.

7.17. Proposition — génération de familles à écart de temps de vol contrôlé

Soit U_n une feuille de rang j dans un arbre MSP^2 , et supposons que son trajet jusqu'à un point de raccordement donné comporte T_n étapes. D'après la relation verticale générale du §7.4/§7.11, entre deux feuilles successives de même rang,

$$U_{n+1} = 4^{(3^{j-1})}U_n + (3^j - 2^j) \cdot (4^{(3^{j-1})} - 1)/3^j,$$

le passage de U_n à U_{n+1} ajoute exactement $E_j = 2 \cdot 3^{j-1}$ étapes paires MSP^2 (cf. §7.11). Par conséquent, $T_{\{n+1\}} = T_n + 2 \cdot 3^{j-1}$, et par récurrence, après m passages verticaux dans la même famille,

$$T_{n+m} = T_n + m \cdot 2 \cdot 3^{j-1}.$$

Ainsi, à partir d'une seule feuille dont le temps de trajet est connu, la formule verticale engendre une infinité de feuilles dont le temps de trajet est connu exactement. Pour les premiers rangs :

- $j = 1 : T, T+2, T+4, T+6, \dots$
- $j = 2 : T, T+6, T+12, T+18, \dots$
- $j = 3 : T, T+18, T+36, T+54, \dots$
- $j = 4 : T, T+54, T+108, T+162, \dots$

L'écart entre deux feuilles successives est donc 2, 6, 18, 54, ..., soit une multiplication par 3 à chaque augmentation du rang. En parallèle, la divisibilité dyadique maximale détermine le rang possible de la feuille : $\text{rang } j \Rightarrow v_2(N) \leq j$ (cf. §6.5).

Conclusion. La structure MSP^2 permet à la fois d'identifier la classe dyadique d'une feuille et de construire des familles infinies de nombres dont l'écart de temps de vol est exactement déterminé : une feuille connue $\Rightarrow$ une infinité de feuilles à temps de vol contrôlé.

8. Implications : cycles, vols répétitifs et escadrilles

8.1. Tout vol est formé de cycles

Tout vol MSP^2 est une concaténation de cycles C_{MSP^2} . Chaque cycle comporte une phase impaire puis au moins une étape paire, et se termine sur un nouvel impair qui devient le point de départ du cycle suivant.

8.2. Vol répétitif

On appelle vols répétitifs deux vols qui présentent le même profil fini de montées et de descentes, indépendamment des valeurs numériques exactes parcourues. Par exemple, deux trajectoires ayant successivement trois descentes puis deux montées ont le même profil répétitif sur cette portion.

Les périodes d'entrée en puissances de 2 et les périodes de sortie faisant intervenir les puissances de 3 peuvent être combinées cycle après cycle. Pour toute suite finie de cycles considérée, on peut rechercher un emboîtement commun des périodes et donc reproduire un même profil fini.

8.3. Vol en escadrille — à Fati

On considère une série d'entiers impairs et on applique MSP^2 . À chaque sélection de parité, une partie des nombres conserve le profil demandé. En répétant le filtrage, on sélectionne les nombres qui suivent un profil fini prescrit pendant un nombre donné d'étapes.

Cette construction permet de rechercher des trajectoires présentant un nombre fini choisi de montées, de descentes et de rebonds, dans les limites imposées par la dynamique et sans introduire de comportement infini dans la prescription.

8.4. Méthode Mehdi

La méthode Mehdi calcule un vol cycle par cycle en commençant par une division par 8. On examine le quotient et le reste, puis la période associée au reste. Si le reste correspond au cas déjà convergé, le cycle est terminé ; sinon, les périodes successives permettent de déterminer le niveau du cycle suivant. Cette méthode fournit une lecture compacte du vol par cycles.

Démonstration de la stabilisation par les périodes MSP^2 . Soit N un nombre impair. À chaque reste r obtenu au cours de la procédure, on associe sa période d'entrée MSP^2 $P(r) = 2^{n(r)+1}$, où $n(r)$ désigne le nombre d'étapes du cycle MSP^2 associé à r (cf. §7.15).

1. Procédure. On commence par la période minimale 8 et l'on écrit $N = 8q_0 + r_0$, $0 \leq r_0 < 8$. On calcule ensuite la période $P(r_0)$ associée au reste r_0 , puis $N = P(r_0)q_1 + r_1$, et l'on recommence : à chaque étape, le nouveau diviseur est la période d'entrée associée au reste obtenu à l'étape précédente, soit $r_{j+1} = N \bmod P(r_j)$. La stabilisation est atteinte lorsque $r_{j+1} = r_j$.

2. *Identification du cycle lorsque le reste est stabilisé.* Supposons que le reste se stabilise en r^* et que $P^* = P(r)$ soit sa période d'entrée. Alors $N = kP + r$. Par définition de P , tous les nombres de la classe $r^* + kP^*$ suivent le même cycle MSP^2 que r^* : le reste r^* identifie donc le cycle de N . Si s est la sortie du cycle de r^* et P_sortie sa période de sortie, la sortie du cycle de N est $s + kP_sortie$, qui devient l'entrée du cycle suivant.

3. *Cas d'un dépassement de la période stabilisatrice.* Supposons qu'une période stabilisatrice $P^* = 2^b$ soit associée au reste stabilisé r , et qu'on rencontre en cours de recherche une période plus grande $P = 2^a > P^* = 2^b$. Comme toutes les périodes d'entrée sont des puissances de 2, P^* divise P . Soit $r = N \bmod P$; il existe k tel que $N = r + kP$. Puisque P^* divise P , $N \equiv r \pmod{P}$; mais par définition du reste stabilisé, $N \equiv r \pmod{P}$, donc $r \equiv r \pmod{P}$. Le reste obtenu après le dépassement appartient donc encore à la même classe modulo P que le reste stabilisé, et puisque P^* est la période d'entrée de cette classe, r possède le même profil de cycle : $P(r) = P$. À l'étape suivante, $N \bmod P = r^*$. Ainsi, un dépassement de la période stabilisatrice ne fait pas perdre la classe correcte : l'étape suivante ramène à la bonne période, puis au reste stabilisé.

4. *Exemple : $N = 1051$.* $1051 \bmod 8 = 3$. La période associée à 3 est 64 : $1051 \bmod 64 = 27$. La période associée à 27 est 16 : $1051 \bmod 16 = 11$. La période associée à 11 est elle-même 16 ; le reste est donc stabilisé : $11 \rightarrow 11$, soit $1051 = 11 + 65 \times 16$. Le cycle de 1051 s'obtient donc à partir du cycle de 11 : si 11 sort en 13 avec une période de sortie 18, alors $1051 \mapsto 13 + 65 \times 18 = 1183$, qui devient l'entrée du cycle suivant.

Conclusion. La méthode Mehdi recherche, par divisions successives par les périodes d'entrée associées aux restes, le représentant périodique du cycle de N . Un reste stabilisé identifie la classe de cycle de N et permet d'en calculer directement la sortie ; si une période rencontrée dépasse la période stabilisatrice, l'emboîtement des puissances de 2 conserve la congruence modulo la bonne période, et l'étape suivante ramène à cette période puis au reste stabilisé : reste stabilisé $\rightarrow$ cycle identifié $\rightarrow$ sortie calculée $\rightarrow$ cycle suivant.

Exemple complémentaire — calcul du nombre total d'étapes pour $N = 45839$. La méthode s'utilise également pour calculer, de proche en proche, le nombre total d'étapes (impaires et paires) séparant un départ N de 1, par divisions euclidiennes successives par la période associée à chaque reste rencontré.

On part de $45839/8 = 5729 \times 8 + 7$, avec $P_7 = 32$; puis $45839/32 = 1432 \times 32 + 15$, avec $P_{15} = 512$; puis $45839/512 = 89 \times 512 + 271$, avec $P_{271} = 1024$; puis $45839/1024 = 44 \times 1024 + 783$, avec $P_{783} = 4096$; enfin $45839/4096 = 11 \times 4096 + 783$: le reste se stabilise à 783. Ainsi 45839 et

783 suivent la même trame sur ce premier cycle. Comme 783 conduit à 31 en 4 étapes impaires et 7 étapes paires, 45839 conduit à 1813 après ce même nombre d'étapes ($1813 = 31 + 11 \times 6 \times 3^3$, où 11 est le quotient trouvé et 6×3^3 la période associée au reste).

On répète l'opération jusqu'à atteindre 1 :

Tableau N°1 : Étapes de la méthode Mehdi — calcul du nombre d'étapes pour $N = 45839$

Division	Période	N entrée	Ét. impaires	Ét. paires	N sortie
45839 = $5729 \times 8 + 7$ →	$P_{783} = 4096$	45839	4	7	1813
$45839/32 = 1432 \times 32 + 15$ →					
$/512 = 89 \times 512 + 271$ →					
$/1024 = 44 \times 1024 + 783$ →					
$/4096 = 11 \times 4096 + 783$					
$1813/8 = 226 \times 8 + 5$, $/64 = 28 \times 64 + 21$	$P_{21} = 64$	1813	2	1	1219
$1219/8 = 152 \times 8 + 3$, $/64 = 19 \times 64 + 3$	$P_3 = 64$	1219	2	3	343
$343/8 = 42 \times 8 + 7$, $/32 = 10 \times 32 + 23$, $P_{87} = 128$		343	3	3	145
$/256 = 1 \times 256 + 87$					
$145/8 = 18 \times 8 + 1$	$P_1 = 8$	145	1	1	109
...		109	...	...	... →
					1

Source : élaboration des auteurs

Cette méthode permet de calculer rapidement le nombre d'étapes séparant tout entier de 1, et peut être utilisée dans l'autre sens : des nombres comme 15, 527, 1039, ... partagent ainsi la même trame de départ.

9. Réduction du problème aux représentants canoniques

9.1. Réduction aux représentants

Chaque branche d'un arbre MSP² est finie. Toute feuille appartient donc à une branche finie et peut être ramenée à la première feuille de cette branche.

Toutes les branches d'un même arbre rejoignent ensuite le premier embranchement pair commun. L'arbre entier peut ainsi être représenté par une unique feuille : la première feuille de la première branche.

Cette feuille est appelée représentant canonique de l'arbre. L'étude peut donc être limitée à l'ensemble de ces représentants.

9.2. Élimination des représentants qui ne créent pas de nouveau cas

Les représentants de type $6q-1$ possèdent un représentant-parent strictement plus petit. Ils ne constituent donc pas de nouveaux cas indépendants.

Les représentants de type $6q+3$ reviennent immédiatement vers un impair plus petit et ne créent pas non plus de nouveaux cas indépendants.

Il reste alors à étudier les représentants canoniques de type $6q+1$.

9.3. Structure commune des arbres

Tous les arbres sont construits suivant la même règle récursive. Ils ne diffèrent que par leur racine et par l'élagage des feuilles qui ne correspondent pas à des entiers.

Lorsqu'une branche produit sa première feuille non entière, cette branche n'est plus poursuivie dans l'arbre arithmétique.

On peut ainsi distinguer l'arbre abstrait, obtenu en appliquant indéfiniment la règle de construction, et l'arbre arithmétique, dans lequel les feuilles non entières sont supprimées. Avant cet élagage, tous les arbres ont la même structure paramétrée par leur racine.

9.4. Première colonne d'un arbre

Pour une racine

$$R(q) = 6q + 1$$

la première colonne est donnée par

$$A_n(q) = [4^{n+1}(6q+1) - 1] / 3$$

Elle vérifie

$$3A_n(q) + 1 = 4^{n+1}(6q+1)$$

Chaque feuille de cette colonne rejoint ainsi le même embranchement pair, puis revient à la racine de l'arbre.

9.5. Initialisation

Le premier passage constitue un cas particulier. La famille

$$24m + 1$$

engendre plusieurs sous-familles dont une seule demeure indépendante après élimination des représentants déjà connus. Cette étape sert à initialiser le processus avant l'apparition du régime stabilisé.

9.6. Régime stabilisé : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

Une fois l'initialisation effectuée, le mécanisme devient invariant. Chaque famille représentative engendre quatre sous-familles.

- deux ne correspondent pas à des premières feuilles ;
- une correspond à une première feuille d'une branche déjà représentée ;
- une seule reste une première feuille de première branche, donc un représentant canonique indépendant.

Le mécanisme se résume alors par

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

Les trois familles éliminées sont rattachées à des arbres déjà représentés.

9.7. Initialisation explicite du régime stabilisé

Le premier cycle stabilisé est obtenu à partir des quatre familles

$$32u+1, 32u+9, 32u+17, 32u+25$$

qui donnent

$$24u+1, 24u+7, 24u+13, 24u+19$$

Le classement structurel est le suivant :

- $24u+7$ et $24u+19$ sont congrus à 3 modulo 4 : ce ne sont pas des premières feuilles ;
- $24u+13$ est congru à 5 modulo 8 : c'est une première feuille, mais pas celle de la première branche ;
- $24u+1$ est la seule classe qui conserve le statut de représentant canonique indépendant.

Ainsi, le mécanisme $4 \rightarrow 1$ est établi au rang initial.

En redécomposant ensuite

$$u = 4v + s, s \in \{0,1,2,3\}$$

on retrouve quatre familles de même structure, plus loin dans l'organisation. Le mécanisme peut donc être soumis à une récurrence sur les cycles complets.

9.8. Reproduction uniforme des familles

Pour tout rang $j \geq 0$, les quatre familles représentatives peuvent s'écrire sous la forme

$$F_{j,s}(u) = A_j u + 1 + s \cdot A_j / 4, s \in \{0,1,2,3\}$$

avec

$$A_0 = 288, A_{j+1} = 3A_j$$

et donc

$$A_j = 288 \cdot 3^j$$

Démonstration par récurrence. Le rang initial est obtenu par calcul direct. Supposons la forme vraie au rang j . La famille survivante est

$$(3/4)A_j u + 1$$

En écrivant $u = 4v+s$, on obtient

$$3A_j v + 1 + s \cdot (3A_j / 4)$$

soit exactement la même forme au rang $j+1$ avec $A_{j+1} = 3A_j$. La structure algébrique des quatre familles se reproduit donc uniformément à tous les rangs.

9.9. Récurrence des blocs et point bloquant

La récurrence interne des familles, $A_{j+1} = 3A_j$, doit être distinguée de la récurrence des blocs. On note B_j le premier représentant non trivial qui n'a pas encore été absorbé après le j -ième bloc complet.

Le bloc initial vérifie

$$B_0 = 25$$

À chaque passage au bloc suivant, seize copies du bloc précédent sont raccordées bout à bout. Deux copies voisines partagent leur point de frontière. Il en résulte

$$B_{j+1} - 1 = 16(B_j - 1)$$

ou, de manière équivalente,

$$B_{j+1} = 16B_j - 15$$

En posant $C_j = B_j - 1$, on obtient $C_{j+1} = 16C_j$ avec $C_0 = 24$. Par conséquent

$$B_j = 24 \cdot 16^j + 1$$

Les premiers termes sont

25, 385, 6145, 98305, ...

La croissance est stricte puisque

$$B_{j+1} - B_j = 360 \cdot 16^j > 0$$

Ainsi $B_j \rightarrow +\infty$.

9.10. Invariant de couverture

La croissance du point bloquant s'accompagne de l'invariant suivant : après le traitement du bloc de rang j , tout représentant strictement inférieur à B_j est déjà absorbé par un arbre résolu.

Toute famille rencontrée avant B_j appartient à l'un des cas suivants :

- elle n'est pas une première feuille ;
- elle est une première feuille d'une branche supérieure ;
- elle appartient à un arbre déjà représenté par une première feuille antérieure ;
- elle est l'une des familles éliminées par la reproduction uniforme.

Ainsi, aucun représentant canonique indépendant ne demeure derrière le point bloquant.

Pour toute borne finie M , puisque $B_j \rightarrow +\infty$, il existe donc un rang j tel que $B_j > M$. À ce rang, tous les représentants inférieurs ou égaux à M ont déjà été traités.

9.11. Transmission de la couverture

Soit A un arbre MSP^2 et F_A la première feuille de sa première branche, choisie comme représentant canonique. Si la trajectoire de F_A rejoint 1, alors la trajectoire de toute feuille de A rejoint également 1.

En effet, toute feuille d'une branche finie se ramène à la première feuille de cette branche ; les premières feuilles des différentes branches rejoignent ensuite le premier embranchement pair commun de l'arbre. À partir de cet embranchement, elles ont une trajectoire future commune.

$$F_A \rightarrow 1 \Rightarrow \forall x \in A, x \rightarrow 1$$

Par conséquent, la couverture des représentants canoniques se transmet aux arbres correspondants, puis à toutes les feuilles impaires.

Enfin, tout entier positif pair s'écrit $N=2^r m$ avec m impair. Après r divisions par 2, il rejoint m . La résolution de tous les impairs entraîne donc celle de tous les entiers positifs.

représentants canoniques $\rightarrow$ arbres $\rightarrow$ feuilles impaires $\rightarrow$ tous les entiers positifs

9.12. Conclusion de la réduction

Cette partie réduit l'étude globale aux premières feuilles des premières branches, organise leur reproduction en familles, puis en blocs, et établit la croissance du premier représentant encore bloquant. Elle fournit la transition logique vers le Tableau Générateur, qui représente graphiquement les mêmes mécanismes de changement de variables et de récurrence.

10. Familles, blocs et raccordements

L'étude des premières feuilles et des familles associées fait apparaître des blocs réguliers. Les familles s'emboîtent et les raccordements entre la dernière case d'un bloc et la première du bloc suivant assurent la continuité de la construction. Les blocs étudiés sont organisés de manière récursive et leurs points de raccordement ne constituent pas des pertes de cas.

Cette partie sert de transition entre les arbres MSP² et le Tableau Générateur : les familles obtenues seront désormais organisées par changements de variables et tests de parité.

11. Tableau Générateur : construction

11.1. Tableau d'ordre 2

On part de $N_B = 2k+1$. Le déplacement $+1$ conduit à $2k+2$, puis l'opération $\times 3/2$ conduit à $3k+3$. Le test de parité de k sépare ensuite les deux branches et introduit le premier mur.

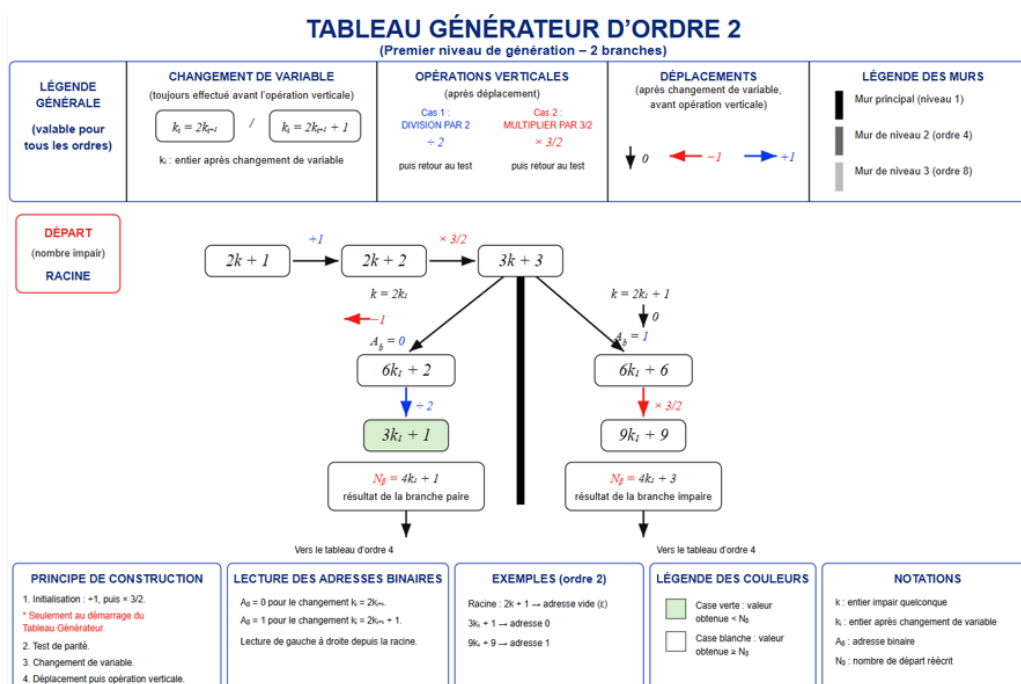


Figure N°2 : Tableau Générateur MSP² à 2 colonnes

Source : élaboration des auteurs

11.2. Tableau d'ordre 4

Le passage à quatre colonnes s'effectue par changement de variable $k_i = 2k_{i+1}$ ou $k_i = 2k_{i+1} + 1$, toujours avant l'opération verticale. Le tableau à quatre colonnes constitue le motif de référence pour toutes les extensions ultérieures.

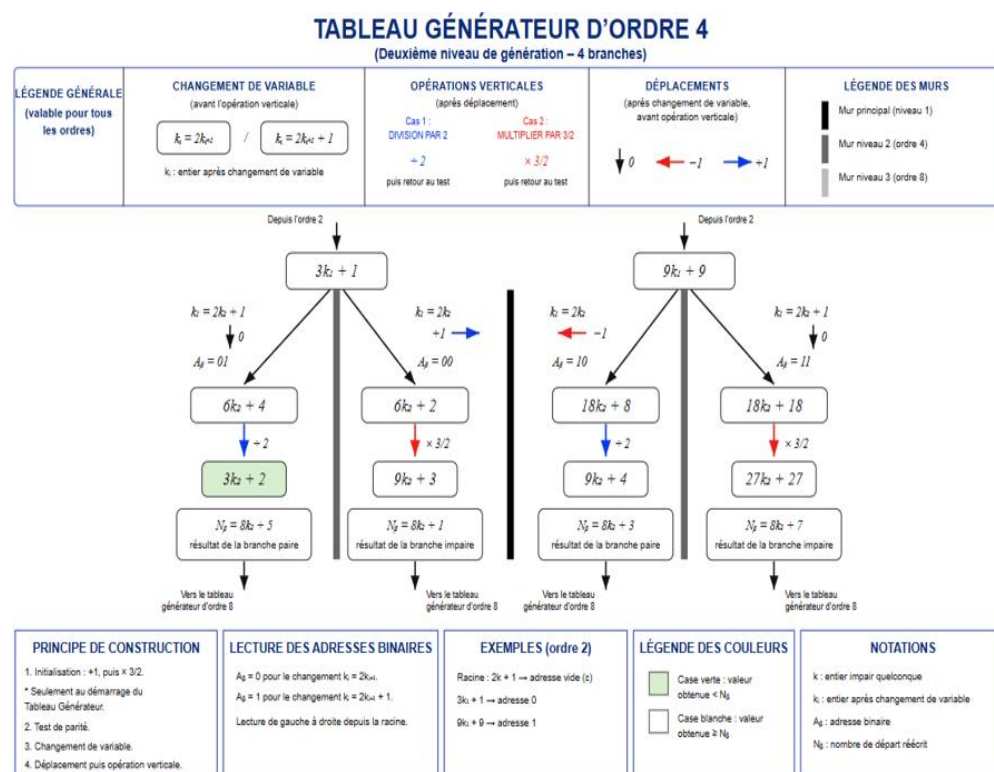


Figure N°3 : Tableau Générateur MSP² à 4 colonnes — figure de référence

Source : élaboration des auteurs

11.3. Tableau d'ordre 8 et duplication locale

Le passage 4→8 ne se fait pas par copie globale d'un demi-tableau, mais par duplication locale des sous-blocs. À partir du mur central, chaque moitié est reproduite localement ; le côté gauche subit l'effet miroir tandis que le côté droit conserve son orientation locale.

Les huit colonnes reçoivent des adresses binaires 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

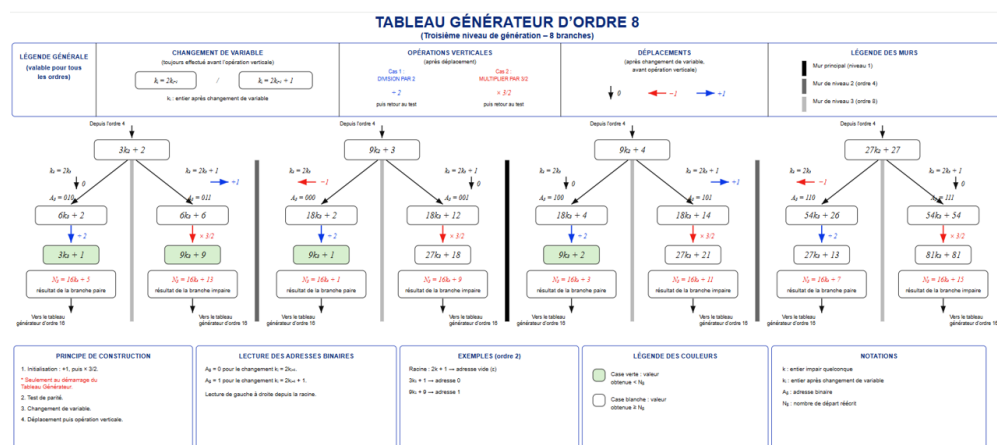


Figure N°4 : Tableau Générateur MSP² à 8 colonnes — première duplication complète

Source : élaboration des auteurs

11.4. Adresses binaires des colonnes

À chaque colonne du Tableau Générateur est associée une adresse binaire qui enregistre les choix successifs effectués lors des changements de variable.

Dans le tableau à huit adresses colonnes représentées ici, les adresses apparaissent, de gauche à droite, dans l'ordre :

010, 011, 000, 001, 100, 101, 110, 111.

Ces adresses constituent un repérage des colonnes et permettent de suivre leur filiation au cours des duplications successives du Tableau Générateur.

Aucune propriété de complémentarité entre colonnes symétriques n'est utilisée ici. L'ordre des bits est celui produit directement par la construction du tableau.

11.5. Ordres 16 et 32

La même duplication locale est poursuivie pour 8→16 puis 16→32. Les corrections validées comprennent notamment, à l'ordre 16, les repères 81–21, 81–40 et 243–243 ; à l'ordre 32, les parents 27–10 et 80–72, ainsi que le parent terminal de type 3k+2.

12. Cousins dans le Tableau Générateur

12.1. Cousins de type I

Deux colonnes apparentées de type I sont notées I₁ et I₂. La comparaison doit être faite après changement de variable, afin de ramener les expressions au même niveau. Le calcul corrigé donne un rapport 3 entre les coefficients principaux correspondants.

12.2. Cousins de type P

Les cousins P_1 et P_2 sont traités par la même procédure : changement de variable, déplacement, division éventuelle, puis comparaison dans une variable commune.

12.3. Cousins de types opposés

Le TG fait également apparaître des relations entre une famille de type I et une famille de type P. La relation fondamentale retenue est $I_1 \leftrightarrow P_2$, en complément de $P_1 \leftrightarrow P_2$ et $I_1 \leftrightarrow I_2$.

13. Propriétés structurelles du Tableau Générateur

13.1. Conservation de la structure

Chaque niveau est obtenu à partir du précédent par les deux substitutions exhaustives $k_j = 2k_{j+1}$ et $k_j = 2k_{j+1} + 1$. Chaque famille se scinde donc en deux sous-familles disjointes, ce qui explique le doublement $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow \dots$.

13.2. Murs emboîtés et effet miroir

Le dernier mur construit fournit la référence locale : relativement à lui, la colonne de gauche correspond au cas pair et celle de droite au cas impair. Relativement à un mur antérieur, l'orientation apparente peut être inversée. Le TG doit donc être lu comme une hiérarchie de murs emboîtés.

13.3. Structure en poupées russes

À la sortie de certains blocs, une structure de même type réapparaît avec de nouveaux paramètres. La reproductibilité est donc à la fois locale et globale : ce n'est pas l'égalité numérique qui se reproduit, mais l'organisation opératoire.

13.4. Régularité de N_B

Les nombres N_B portés par les colonnes ont une forme affine. Dans l'exemple de la colonne extérieure gauche, on observe :

$$4k_1 + 1, 8k_2 + 5, 16k_3 + 5, 32k_4 + 21, 64k_5 + 21, 128k_6 + 85, \dots$$

Le coefficient de k double à chaque ligne. La constante est croissante au sens large : elle peut rester stable pendant un ou plusieurs niveaux, mais ne décroît pas. Cette régularité concerne N_B et ne doit pas être confondue avec les expressions obtenues après les opérations MSP².

14. Démonstration de l'évolution des colonnes du TG

Dans une colonne, les familles s'écrivent A_k+B . Les lois démontrées distinguent les colonnes paires, les colonnes impaires et l'évolution de N_B .

Tableau N°2 : Évolution des colonnes du Tableau Générateur (§14)

	Coefficient A	Constante B
Colonnes paires	stable	cyclique
Colonnes impaires	multiplié par 3 à chaque ligne	strictement croissante
N_B	multiplié par 2 à chaque ligne	croissante au sens large

Source : élaboration des auteurs

14.1. Colonnes paires

Une fois le régime de la colonne paire établi, le coefficient A ne change plus. La constante B évolue suivant un cycle déterminé. La répétition de ce cycle explique la réapparition des mêmes formes affines à coefficient fixé.

14.2. Colonnes impaires

Dans les colonnes impaires, le coefficient A est multiplié par 3 à chaque ligne : A, 3A, 9A, 27A, La constante B reste croissante.

14.3. Couverture d'une colonne nouvellement créée

Lorsqu'une nouvelle colonne stable est créée, son coefficient A_col est connu. Au même niveau, le coefficient de N_B est également connu et double à chaque ligne. On peut donc calculer à l'avance le premier rang r pour lequel $2^r A_NB$ atteint ou dépasse le coefficient nécessaire à la couverture complète de la colonne.

14.4. Exemple : colonne 63

La colonne 63 correspond à la famille $N_B = 64k+63$. À sa création, le coefficient principal de la famille est $A=729$. La constante de création suit la loi $B_{\{n+1\}}=B_n+A_n$ avec $A_{\{n+1\}}=3A_n$, d'où :

(A,B) : (3,1), (9,4), (27,13), (81,40), (243,121), (729,364).

La famille de création est donc :

$729k + 364$.

À ce niveau, $A_{NB}=64$. Comme le coefficient 729 de la colonne reste fixe tandis que celui de N_B double, on obtient :

Tableau N°3 : Exemple numérique — colonne 63 (§14.4)

Ligne supplémentaire	A_{NB}	A_{col}
0	64	729
1	128	729
2	256	729
3	512	729
4	1024	729

Source : élaboration des auteurs

Il reste donc exactement quatre lignes. Les quatre familles restantes sont de la forme $729k+B_0$, $729k+B_1$, $729k+B_2$, $729k+B_3$; les constantes se déduisent du cycle de B déjà établi. Le mécanisme permet en outre de déterminer la zone de classes admissibles entièrement couverte à chaque niveau.

14.5. Conclusion du Tableau Générateur

Le TG associe à chaque famille une expression affine, une adresse de parité et une suite déterminée d'opérations. Les relations entre cousins, l'évolution des colonnes paires et impaires et l'évolution parallèle de N_B permettent de déterminer les familles créées, leur évolution et le nombre fini de lignes restant à traiter. L'exemple de la colonne 63 illustre concrètement ce calcul de couverture.

15. Triangles du Tableau Générateur

Cette partie détaille la construction locale des triangles qui apparaissent dans le Tableau Générateur : la loi de conservation de leurs têtes, la loi de leurs bords, et le théorème général qui détermine mécaniquement les changements de variable une fois le premier terme d'un côté connu.

15.1. Loi de conservation des têtes — branche $4k + 1$

Soit une famille du Tableau Générateur écrite sous la forme $ak + b$. Par construction du TG, son raffinement utilise les deux changements de variable $k \rightarrow 2k$ et $k \rightarrow 2k + 1$:

$$a(2k) + b = 2ak + b,$$

$$a(2k + 1) + b = 2ak + (a + b).$$

Les deux descendants d'une famille $ak + b$ sont donc nécessairement $2ak + b$ et $2ak + (a + b)$. Le descendant obtenu par $k \rightarrow 2k$ conserve exactement la constante b : seul le coefficient de k est doublé. L'autre descendant possède la constante $a + b$. Ainsi, à chaque dédoublement, une branche prolonge la constante de la tête du triangle tandis que l'autre crée la tête complémentaire ; la position géométrique gauche ou droite de ces deux descendants est celle imposée par l'orientation du Tableau Générateur.

Vérification sur la branche $4k + 1$.

$4k + 1 \rightarrow 8k + 1$; $8k + 5 \rightarrow 16k + 5$; $8k + 1 \rightarrow 16k + 1$; $16k + 5 \rightarrow 32k + 5$; $16k + 13 \rightarrow 32k + 13$; $16k + 1 \rightarrow 32k + 1$; $16k + 9 \rightarrow 32k + 9$.

Dans chacun de ces cas, la constante de la famille de départ réapparaît inchangée dans l'un des deux descendants, tandis que le coefficient de k double.

Conséquence. Cette loi permet de déterminer récursivement les têtes et les prolongements structurels des triangles issus de la branche $4k + 1$: $ak + b \rightarrow \{2ak + b ; 2ak + (a + b)\}$. Les sommets intérieurs ne sont donc pas choisis après coup : ils sont produits automatiquement par les deux descendants imposés à chaque raffinement du TG. L'étude de la branche $4k + 3$ est menée séparément (§15.7–15.8) afin de tenir compte de sa différence propre, sans la supposer identique à l'avance.

15.2. Bord extérieur gauche

Le Tableau Générateur est construit à partir d'un entier impair quelconque $N = 2n + 1$ et des transformations MSP². Lorsqu'une famille est raffinée, la variable k est séparée suivant ses deux parités, $k = 2q$ et $k = 2q + 1$. L'orientation choisie pour le TG impose, sur son bord extérieur gauche, l'alternance successive $k \rightarrow 2k + 1$, $k \rightarrow 2k$, $k \rightarrow 2k + 1$, $k \rightarrow 2k$, ... Cette alternance appartient à la construction même du Tableau Générateur ; elle n'est pas une règle ajoutée après observation.

La famille $4k + 1$, déjà couverte dans le raisonnement MSP² (§9), engendre sur ce bord :

$4k + 1 \rightarrow 8k + 5 \rightarrow 16k + 5 \rightarrow 32k + 21 \rightarrow 64k + 21 \rightarrow 128k + 85 \rightarrow 256k + 85 \rightarrow 512k + 341 \rightarrow 1024k + 341 \rightarrow \dots$

Les constantes successives sont donc 1 ; 5, 5 ; 21, 21 ; 85, 85 ; 341, 341 ; ... Le premier terme 1 constitue l'initialisation ; ensuite chaque nouvelle constante apparaît deux fois consécutivement. Si b_r désigne la constante caractéristique d'une paire, $b_0 = 1$, $b_{\{r+1\}} = 4b_r + 1$. En effet, si une étape commence avec une famille $Ak + b$, l'application successive de

$k \rightarrow 2k + 1$ puis de $k \rightarrow 2k$ donne $A_k + b \rightarrow 2A_k + (A + b) \rightarrow 4A_k + (A + b)$: la constante $A + b$ est conservée pendant deux niveaux consécutifs, et le coefficient de k , multiplié par 4, reproduit le même mécanisme au bloc suivant. La récurrence admet la forme fermée $b_r = (4^{r+1} - 1)/3$.

Conclusion. Les familles du bord extérieur gauche sont entièrement déterminées par les règles de construction du TG : l'alternance imposée engendre la répétition des constantes par paires et la récurrence $b_{r+1} = 4b_r + 1$.

15.3. Triangle de deuxième rang : bord issu de $16k + 13$

On isole le triangle intérieur dont le sommet est la famille $16k + 13$. Les deux premières familles issues de ce sommet sont $32k + 29$ et $32k + 17$; on étudie ici le bord passant par $32k + 29$.

Le triangle de deuxième rang est engendré par la même règle locale de duplication et de changement de variable que le triangle initial du TG (§15.2) ; seule son initialisation diffère : le coefficient du sommet est ici 16 au lieu de 4. Au premier passage sur ce bord, $k \rightarrow 2k + 1$ donne $16(2k+1) + 13 = 32k + 29$; la règle du bord impose ensuite $k \rightarrow 2k$, ce qui conserve la constante 29 pendant le niveau suivant : $32(2k) + 29 = 64k + 29$. Le même mécanisme se répète : $k \rightarrow 2k + 1$ donne $64(2k+1) + 29 = 128k + 93$ ($93 = 29 + 64$), puis $k \rightarrow 2k$ conserve cette constante : $128(2k) + 93 = 256k + 93$.

Le bord commence donc par :

$16k + 13 \rightarrow 32k + 29 \rightarrow 64k + 29 \rightarrow 128k + 93 \rightarrow 256k + 93 \rightarrow 512k + 349 \rightarrow 1024k + 349 \rightarrow \dots$

Les constantes caractéristiques de ce bord sont donc 13 ; 29, 29 ; 93, 93 ; 349, 349 ; ... — le premier terme 13 étant l'initialisation, chaque nouvelle constante apparaissant ensuite deux fois, avec des accroissements successifs 16, 64, 256, 1024, ... (multipliés par 4 d'une paire à la suivante) : $29 = 13+16$, $93 = 29+64$, $349 = 93+256$.

Conclusion. Le bord étudié obéit à la même mécanique de construction que le bord correspondant du triangle initial : elle n'est pas une loi nouvelle, mais la reproduction par duplication locale du TG, avec une initialisation différente.

15.4. Triangle de deuxième rang de type B : bord issu de $16k + 1$

On considère le triangle de deuxième rang dont le sommet est la famille $16k + 1$; dans l'orientation retenue, le bord étudié commence par $32k + 17$. La règle locale du TG est la même que pour le triangle du §15.3. Le premier changement de variable est $k \rightarrow 2k + 1$: $16(2k+1) + 1 = 32k + 17$. Le changement complémentaire suivant, $k \rightarrow 2k$, double le coefficient sans modifier la constante : $32(2k) + 17 = 64k + 17$. La constante 17 apparaît donc deux fois ; le mécanisme recommence ensuite : $k \rightarrow 2k + 1$ donne $64(2k+1) + 17 = 128k + 81$ ($81 = 17+64$), puis $k \rightarrow 2k$ conserve à nouveau la constante : $128(2k) + 81 = 256k + 81$. Au bloc suivant : $256(2k+1) + 81 = 512k + 337$, $512(2k) + 337 = 1024k + 337$.

La suite obtenue est donc :

$$16k + 1 \rightarrow 32k + 17 \rightarrow 64k + 17 \rightarrow 128k + 81 \rightarrow 256k + 81 \rightarrow 512k + 337 \rightarrow 1024k + 337 \rightarrow \dots$$

Les constantes du bord sont 1 ; 17, 17 ; 81, 81 ; 337, 337 ; ..., avec des accroissements 16, 64, 256, ... multipliés par 4 d'une paire à la suivante.

Conclusion. Ce triangle de deuxième rang de type B obéit à la même loi locale que celui du §15.3 ; la seule différence entre les deux triangles réside dans la constante initiale : 1 ici, contre 13 pour l'autre triangle.

15.5. Origine du sommet $16k + 13$

Le sommet $16k + 13$ du triangle intérieur de deuxième rang (§15.3) n'est pas introduit indépendamment : il apparaît automatiquement lors du raffinement de la famille $8k + 5$. La séparation de la variable k suivant ses deux parités donne en effet $8(2k) + 5 = 16k + 5$ et $8(2k+1) + 5 = 16k + 13$; la famille $8k + 5$ engendre donc simultanément $16k + 5$ et $16k + 13$. Lorsque l'on poursuit le bord extérieur issu de $16k + 5$, on obtient notamment $32k + 21$ (§15.2). Le sommet $16k + 13$ du triangle intérieur suivant est donc déjà déterminé par la même séparation de $8k + 5$: il n'est ni choisi ni ajouté après coup.

Point acquis. Le triangle de sommet $16k + 13$ est engendré naturellement par la construction du Tableau Générateur, comme conséquence directe du dédoublement de la famille $8k + 5$.

15.6. Remarque de symétrie — triangle $16k + 11$

Afin de conserver une présentation strictement symétrique à celle adoptée pour la famille $4k + 1$, on isole également le triangle intérieur de tête $16k + 11$. Aucune nouvelle démonstration

n'est nécessaire : sa loi de bord est déjà contenue dans la loi générale des bords intérieurs du triangle $4k + 3$ (§15.8), en prenant simplement $16k + 11$ comme premier terme :

$$16k + 11 \rightarrow 32k + 27 \rightarrow 64k + 59 \rightarrow 128k + 123 \rightarrow 256k + 251 \rightarrow \dots$$

Le côté correspondant de ce triangle obéit à la même règle $k \rightarrow 2k + 1$; les constantes reçoivent successivement les accroissements $+16, +32, +64, +128, \dots$. Cette remarque ne constitue donc pas un résultat nouveau, mais explicite le cas $16k + 11$ afin de maintenir la symétrie de la construction.

15.7. Triangle $4k + 3$: bord gauche

Sur ce bord, à chaque génération, le changement de variable imposé est toujours $k \rightarrow 2k + 1$. Pour une famille générale $ak + b$, cette substitution donne $a(2k+1) + b = 2ak + (a+b)$. Appliquée à la famille $4k + 3$:

$$4k + 3 \rightarrow 8k + 7 \rightarrow 16k + 15 \rightarrow 32k + 31 \rightarrow 64k + 63 \rightarrow 128k + 127 \rightarrow \dots$$

Les constantes successives 3, 7, 15, 31, 63, 127, ... vérifient la récurrence $b_{n+1} = 2b_n + 1$, avec $b_0 = 3$, d'où la forme fermée $b_n = 2^{n+2} - 1$. En numérotant le sommet $4k + 3$ par $n = 0$, la famille au rang n sur ce bord est donc $2^{n+2}k + (2^{n+2} - 1)$.

Conclusion. Contrairement au bord gauche étudié pour la branche $4k + 1$ (§15.2), il n'y a ici aucune alternance de substitutions : la même substitution $k \rightarrow 2k + 1$ est répétée à chaque génération, et la loi du bord en découle directement.

15.8. Triangle $4k + 3$: bords intérieurs successifs

Après le premier bord (§15.7), les têtes intérieures du triangle $4k + 3$ engendrent des bords suivant exactement la même règle locale, avec une initialisation différente. Ainsi la tête intérieure $8k + 3$ engendre, par la substitution répétée $k \rightarrow 2k + 1$:

$$8k + 3 \rightarrow 16k + 11 \rightarrow 32k + 27 \rightarrow 64k + 59 \rightarrow 128k + 123 \rightarrow \dots$$

Les constantes évoluent suivant $3 \rightarrow 11 \rightarrow 27 \rightarrow 59 \rightarrow 123 \rightarrow \dots$, avec des accroissements successifs $+8, +16, +32, +64, \dots$

Le phénomène ne dépend pas de la valeur particulière de la tête : si l'on part d'une famille $Ak + b$ et que l'on suit ce bord en répétant $k \rightarrow 2k + 1$, chaque étape transforme $Ak + b \rightarrow 2Ak + (A + b)$; au rang suivant, le coefficient A a doublé, donc l'accroissement ajouté à la constante double aussi. Une tête commençant avec le coefficient A produit ainsi des accroissements A ,

$2A, 4A, 8A, \dots$ Par exemple, pour la tête $16k + 3 : 16k + 3 \rightarrow 32k + 19 \rightarrow 64k + 51 \rightarrow 128k + 115 \rightarrow \dots$, avec des accroissements $+16, +32, +64, \dots$

Loi générale. Pour toute tête $A_k + b$ de ce type, $A_n = 2^n A$, $b_{\{n+1\}} = b_n + A_n$, d'où après n étapes $A_{nk} + b_n = 2^n A_k + [b + (2^n - 1)A]$.

Conclusion. Le premier bord et les bords intérieurs successifs obéissent à la même mécanique de croissance ; seuls leur point de départ et leur coefficient initial changent. Les bords intérieurs ne nécessitent donc pas une nouvelle règle : ils sont reconstruits par répétition de la même substitution $k \rightarrow 2k + 1$.

15.9. Théorème général des changements de variable — côtés droits des triangles

On considère les descentes verticales du Tableau Générateur dans les colonnes dont l'expression MSP^2 est de la forme $Ak + b$, avec A impair et, dans les niveaux étudiés ici, $A = 3^r$. Le premier terme b de chaque nouveau tableau est fixé par la construction du TG ; une fois ce premier terme connu, toute la suite des changements de variable est déterminée.

Règle verticale élémentaire. La parité de la constante b détermine le changement de variable : b pair $\Rightarrow k \rightarrow 2k$; b impair $\Rightarrow k \rightarrow 2k + 1$. Après ce changement, la descente verticale ramène le coefficient devant k à A , et la constante suivante est donnée par $T_A(b) = b/2$ si b est pair, et $T_A(b) = (A+b)/2$ si b est impair. La colonne évolue donc selon $Ak + b \rightarrow Ak + T_A(b)$.

Démonstration. Si b est pair, $k \rightarrow 2k$ donne $A(2k)+b = 2Ak+b \rightarrow Ak + b/2$. Si b est impair, $k \rightarrow 2k+1$ donne $A(2k+1)+b = 2Ak+(A+b) \rightarrow Ak + (A+b)/2$. Comme A est impair, $A+b$ est pair lorsque b est impair, donc les deux expressions obtenues sont entières.

Exemple au niveau $A = 9$. Le tableau étudié commence par $9k + 4$. L'itération de T_9 donne $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4$, soit $9k+4 \rightarrow 9k+2 \rightarrow 9k+1 \rightarrow 9k+5 \rightarrow 9k+7 \rightarrow 9k+8 \rightarrow 9k+4$. Les six constantes 1, 2, 4, 5, 7, 8 sont exactement les six classes modulo 9 non multiples de 3 ; les changements de variable correspondants sont $2k, 2k, 2k+1, 2k+1, 2k+1, 2k$, puis répétition. Un tableau du même niveau commençant par $9k+1$ parcourt la même boucle avec un déphasage : $1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Théorème. Pour tout côté droit d'un triangle relevant de cette construction verticale du TG, supposons connus son coefficient $A = 3^r$ et la première constante b_0 imposée par le nouveau demi-tableau. Alors toute la suite des changements de variable est déterminée récursivement par $b_{\{n+1\}} = T_A(b_n)$, avec b_n pair $\Rightarrow k \rightarrow 2k$ et b_n impair $\Rightarrow k \rightarrow 2k+1$. Il n'est donc pas nécessaire de reconstruire chaque colonne du triangle pour connaître ses changements de

variable : le coefficient A et le premier terme b_0 suffisent, et deux côtés commençant dans la même boucle à des positions différentes suivent des règles identiques à un déphasage près.

Portée. Ce résultat règle le mécanisme des changements de variable pour les côtés droits des triangles étudiés, sous réserve de la détermination séparée du premier terme de chaque nouveau niveau, objet du §15.10.

15.10. Système de création du premier terme et boucles verticales

Ce paragraphe rassemble en une procédure unique le mécanisme du Tableau Générateur : création du premier terme d'un nouveau bloc, puis détermination de la boucle verticale, de sa longueur et de la suite des changements de variable, à tout rang fini de construction.

Deux étapes distinctes. Premièrement, la construction du TG crée le premier terme du nouveau bloc (le « retour de chariot »). Deuxièmement, une fois ce premier terme connu, la règle verticale T_A (§15.9) détermine toute la boucle : création du bloc $\rightarrow$ retour de chariot $\rightarrow$ premier terme $\rightarrow$ boucle verticale.

Premier exemple. Au premier niveau considéré, la construction part de $3k + 3$. Le changement de variable $k \rightarrow 2k$ donne $6k + 3$; le déplacement vers la colonne correspondante applique -1 , puis la descente verticale divise par 2 : $3k+3 \rightarrow 6k+3 \rightarrow 6k+2 \rightarrow 3k+1$. Ainsi $3k + 1$ n'est pas choisi arbitrairement : il est engendré par la construction du TG et constitue le premier terme du bloc correspondant.

Retour de chariot. Lors du doublement suivant du tableau, le coefficient caractéristique est multiplié par 3 ; le même principe de déplacement/repositionnement produit le premier terme du nouveau bloc, par analogie avec le retour de chariot d'une machine à écrire : après la création d'un bloc, la construction se replace dans l'orientation requise pour créer le bloc suivant. Au niveau de coefficient 9, on peut ainsi entrer dans la boucle des familles $9k+b$ par $9k+4$, $9k+8$, $9k+1$, etc. : ces expressions ne définissent pas des lois différentes, mais correspondent à des déphasages d'une même boucle.

Longueur de la boucle. La longueur de la boucle est obtenue en itérant T_A à partir du premier terme b_0 jusqu'au premier retour à b_0 : $b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_L = b_0$, $b_{\{n+1\}} = T_A(b_n)$. Connaître le premier terme suffit donc pour calculer la succession des constantes, la longueur du cycle vertical et toute la suite des changements $k \rightarrow 2k$ ou $k \rightarrow 2k+1$.

Passage aux niveaux 3, 9, 27, 81, ... La construction du TG produit successivement des niveaux dont le coefficient caractéristique est multiplié par 3 : $3 \rightarrow 9 \rightarrow 27 \rightarrow 81 \rightarrow \dots \rightarrow 3^r$.

À chaque nouveau niveau, le mécanisme de construction et de retour de chariot détermine le premier terme $3^rk + b_0$; la règle $T_{\{3^r\}}$ prend ensuite le relais et détermine toute la descente verticale.

Proposition générale. À tout rang fini du Tableau Générateur, dès que la construction du nouveau bloc a fixé son coefficient $A = 3^r$ et son premier terme $Ak + b_0$, la suite verticale de ce bloc est entièrement déterminée par l'itération de T_A : le premier retour à b_0 donne la longueur de la boucle, et la parité de chaque b_n donne le changement de variable correspondant.

Portée. Cette proposition formalise le mécanisme de calcul une fois le premier terme produit par le TG. La règle générale explicite qui donne directement b_0 à chaque nouveau niveau à partir du niveau précédent reste à formuler à partir du mécanisme complet de retour de chariot ; tant que cette dernière récurrence n'est pas écrite, elle n'est pas remplacée par une extrapolation. Le système sépare ainsi proprement deux questions : le TG crée le premier terme, la règle verticale détermine ensuite sans ambiguïté toute la boucle associée — cadre nécessaire pour décrire les changements de variable des triangles de manière récursive et contrôlée.

16. Borne de couverture et optimisations

Cette partie établit la notion de couverture d'un départ, son héritage le long des raffinements du TG, une première borne finie garantissant la couverture progressive d'une tranche d'entiers, puis deux optimisations successives de cette borne.

16.1. Définitions : couverture, limite de couverture, héritage

Définition (couverture). Un nombre de départ N est dit couvert dès que son vol, au cours de son évolution MSP^2 (équivalente au regroupement considéré des étapes de Syracuse), atteint une valeur strictement inférieure à N :

N est couvert $\Leftrightarrow$ il existe une étape du vol telle que $N_{\text{suivant}} < N_{\text{départ}}$.

Pour une famille, « couverte » signifie que les nombres de la famille satisfont cette propriété dans le cadre du mécanisme établi pour cette famille.

Définition (limite de couverture). Dans la représentation triangulaire du TG, la limite de couverture désigne la frontière repérée par les familles d'entrée au rang considéré à laquelle le franchissement sous la valeur de départ est acquis. Cette limite, portée par les familles d'entrée du triangle, ne doit pas être confondue avec l'expression MSP^2 utilisée pour calculer les

transformations verticales : famille d'entrée $\rightarrow$ position dans le triangle $\rightarrow$ limite de couverture, tandis que expression $MSP^2 \rightarrow$ calcul des changements de variable et de la descente verticale.

Proposition (héritage de la couverture). Si une famille F est couverte et si F' est une sous-famille obtenue par un raffinement du paramètre k dans le TG, alors F' est également couverte : $F' \subseteq F$ et F couverte $\Rightarrow F'$ couverte.

Démonstration. Tout élément de F' appartient déjà à F . Puisque le statut « couvert » signifie que son vol a déjà franchi une valeur strictement inférieure à sa valeur de départ, le fait de classer ensuite cet élément dans une sous-famille plus fine ne peut supprimer ce franchissement déjà réalisé.

Corollaire. Lorsque la famille située à la tête d'un triangle est couverte, toutes les familles filles, petites-filles et, plus généralement, toutes les sous-familles obtenues par les raffinements successifs à l'intérieur de ce triangle sont couvertes : tête couverte $\Rightarrow$ toutes les descendantes du triangle sont couvertes. Cette conclusion reste vraie même si, après le premier franchissement sous la valeur de départ, le vol présente ensuite une remontée ou des rebonds : la définition de la couverture exige seulement que le vol soit déjà passé au moins une fois strictement sous sa valeur initiale.

Application au demi-tableau gauche. Le demi-tableau gauche est organisé à partir de la branche associée à $4k + 1$ et de la famille d'entrée $3k + 1$. Une fois la couverture de cette famille d'entrée acquise, toutes les familles produites ensuite dans ce demi-tableau sont ses descendantes au sens du raffinement du TG : $3k + 1$ couverte $\Rightarrow$ toutes ses sous-familles dans ce demi-tableau sont couvertes. Il n'est donc pas nécessaire de redémontrer séparément la couverture de chaque famille affine apparaissant plus bas dans le triangle.

Distinction à conserver. Une famille peut changer d'écriture affine au cours des opérations du TG ; cette écriture courante ne doit jamais être confondue avec son statut logique de couverture (forme affine actuelle $\neq$ statut de couverture). La forme affine sert à poursuivre les calculs ; le statut « couvert » enregistre un événement déjà réalisé dans le vol.

Règle générale. Pour tout triangle du TG, dès que la couverture de sa famille de tête (ou de la famille mère qui engendre toutes les familles du triangle) est établie, la couverture de toutes ses familles descendantes est acquise. Le triangle peut ensuite être développé à tout rang fini choisi pour en connaître la structure et les positions, sans rouvrir la question de la couverture de chacune de ses sous-familles.

16.2. Démonstration d'une borne finie — couverture progressive

Version de travail — borne volontairement non optimisée.

Le but de cette première formalisation n'est pas d'obtenir une borne efficace, mais d'établir une borne explicite et finie. À chaque niveau du TG, on couvre la moitié de la partie qui restait encore à couvrir ; le raccord avec une partie déjà couverte est obtenu après un nombre fini de lignes.

Initialisation : tableau de référence à 4 colonnes. Les fractions de couverture ci-dessous se rapportent au tableau initial à 4 colonnes, même si le TG est ensuite développé beaucoup plus loin pour rechercher les raccords. Première étape : $1/2$ du tableau est couverte. La moitié restante est ensuite partagée en deux, et une nouvelle moitié de cette partie restante est raccordée à une partie déjà couverte : on obtient $1/2 + 1/4 = 3/4$ du tableau de référence couverts.

Premier raccord quantitatif : coefficient 9. Dans les deux parties apparaissent des expressions $9k+B$ et $9k+B_1$, avec B et B_1 non nécessairement égales. La boucle verticale du coefficient 9 est $1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, soit 6 états. Une première majoration volontairement grossière prend donc un tour complet, soit 6 passages au maximum (une majoration plus fine donnerait au plus 5 passages entre deux états distincts, mais cette optimisation n'est pas nécessaire ici).

Passage au tableau de référence à 8 colonnes. Le coefficient de raccord devient 27, avec des expressions $27k+B$ et $27k+B_1$ de part et d'autre. La boucle verticale du coefficient 27 comporte 18 états ($22 \rightarrow 11 \rightarrow 19 \rightarrow 23 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 17 \rightarrow 22$) : on prend donc 18 passages comme borne maximale. Ce niveau commence à la ligne 4, d'où une borne de ligne $4 + 18 = 22$, et une borne correspondante de 2^{22} colonnes. Cette valeur est une borne de développement du TG, non l'altitude réelle du vol de 7 : elle sert à garantir le raccord nécessaire pour couvrir les départs représentés jusqu'à 7.

Loi de croissance des boucles. Les coefficients successifs de raccord sont 9, 27, 81, 243, ... et le nombre d'états pris comme borne complète de la boucle est multiplié par 3 à chaque niveau : 6, 18, 54, 162, 486, ..., soit $M_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (avec $M_2 = 6$ pour le coefficient 9).

Forme générale de la première borne. Les tableaux de référence successifs ont pour bornes $K_n = 2^n - 1$ (3, 7, 15, 31, 63, ...). Pour le tableau de référence de borne K_n , le coefficient de raccord considéré est 3^n . Avec le comptage provisoire actuel — recherche débutant à la ligne

$n+1$, longueur maximale de boucle $2 \cdot 3^{n-1}$ — on obtient $L_n = n + 1 + 2 \cdot 3^{n-1}$, d'où la borne de développement du TG :

$$D_n = 2^{L_n} = 2^{n+1+2 \cdot 3^{n-1}}.$$

Tableau N°4 : Bornes de couverture — première majoration (§16.2)

Départs jusqu'à	Coefficient	Boucle max.	Ligne max.	Borne TG
7	27	18	22	2^{22}
15	81	54	59	2^{59}
31	243	162	168	2^{168}
63	729	486	493	2^{493}

Source : élaboration des auteurs

Ces bornes sont volontairement démesurées ; leur seule fonction, à ce stade, est d'être finies. Les optimisations sont étudiées aux §16.3–16.5.

De la couverture à l'arrivée à 1. Pour une borne finie K , si chaque entier N avec $2 \leq N \leq K$ atteint une valeur strictement inférieure à N , alors tous les entiers jusqu'à K atteignent 1 : pour tout N , $2 \leq N \leq K$, il existe $j \geq 1$ tel que $T^j(N) < N$. On raisonne par récurrence forte sur N : lorsqu'un vol partant de N atteint un entier $m < N$, le cas de m est déjà acquis (son vol atteint 1), donc le vol de N atteint lui aussi 1. Les nombres pairs ne demandent pas de traitement supplémentaire : si $N > 1$ est pair, $N/2 < N$, donc ils sont immédiatement couverts ; le travail du TG porte sur les départs impairs. Ainsi, la couverture des impairs 3, 5 et 7 entraîne que tous les entiers jusqu'à 7 atteignent 1 ; la couverture jusqu'à 15 entraîne que tous les entiers jusqu'à 15 atteignent 1 ; et de même jusqu'à 31, 63, etc. La borne de développement du TG (par exemple 2^{22} pour le niveau jusqu'à 7) n'est pas une altitude réelle des vols : c'est une borne finie suffisante, dans la construction, pour garantir que tous les départs de la tranche finie considérée ont acquis une descente stricte sous leur valeur de départ, la récurrence forte donnant alors leur arrivée à 1.

Formulation de l'objectif général. Sous réserve de la démonstration complète de la récurrence structurelle des raccords, la forme recherchée est : pour tout n fini, $N \leq 2^n - 1 \Rightarrow$ il existe j fini tel que $T^j(N) < N$. La construction ci-dessus fournit une première borne, très grossière mais finie, du développement nécessaire : $D_n = 2^{n+1+2 \cdot 3^{n-1}}.$

Statut de cette version. Cette version fixe la mécanique et la première majoration ; elle ne prétend pas encore constituer la preuve finale. Il reste à formaliser la récurrence structurelle garantissant le raccord à chaque coefficient 3^n . Une fois ce point verrouillé, la borne pourra être optimisée sans modifier le principe de finitude établi.

16.3. Première optimisation complète

Récurrence des constantes B et remplacement des boucles complètes par les distances utiles.

Dans la première majoration (§16.2), on prenait systématiquement la longueur complète de la boucle verticale — une borne sûre mais volontairement très large. L'optimisation consiste à ne plus parcourir toute la boucle : on choisit, dans la partie déjà couverte, la route dont la constante vaut $B = 1$ à chaque niveau, puis on calcule dans la partie B le premier terme qui apparaît réellement, et l'on compte seulement la distance verticale utile de 1 jusqu'à cette constante B.

Route choisie dans la partie couverte. Cette route vérifie la transformation générale $A_k + 1 \rightarrow 3A_k + 1$, donnant à chaque rang fini $3k+1 \rightarrow 9k+1 \rightarrow 27k+1 \rightarrow 81k+1 \rightarrow 243k+1 \rightarrow \dots$: la constante de référence reste $B = 1$.

Premier terme de la partie B. Les calculs locaux donnent successivement $4 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 121$ (détail au §16.4).

Récurrence des constantes B. $B_{n+1} = 3B_n + 1$, avec $B_0 = 4$, donnant 4, 13, 40, 121, 364, 1093, ... La forme fermée est $B_n = (3^{n+2} - 1)/2$; avec $A_n = 3^{n+2} = 9 \cdot 3^n$, elle s'écrit aussi $B_n = (A_n - 1)/2$.

Distance utile dans la boucle. Pour une colonne de coefficient A, la règle verticale sur la constante b est $b \mapsto b/2$ si b est pair, $b \mapsto (A+b)/2$ si b est impair. On compte le nombre d'étapes allant de $b = 1$ jusqu'à $b = B = (A-1)/2$:

Tableau N°5 : Récurrence des constantes B — première optimisation (§16.3)

Coefficient A	$B = (A-1)/2$	Distance utile $1 \rightarrow B$	Ancienne boucle complète
9	4	4	6
27	13	10	18
81	40	28	54
243	121	82	162
729	364	244	486
2187	1093	730	1458

Source : élaboration des auteurs

Les distances utiles 4, 10, 28, 82, 244, 730, ... vérifient $d_{n+1} = 3d_n - 2$, avec $d_0 = 4$, d'où $d_n = 3^{n+1} + 1$; comme $A_n = 3^{n+2}$, cette expression s'écrit directement $d(A) = A/3 + 1$.

Effet sur les bornes de développement du TG. En remplaçant, dans la première majoration, la longueur complète de la boucle par la distance utile $1 \rightarrow B$:

Tableau N°6 : Distances utiles dans la boucle verticale — première optimisation (§16.3)

Référence	A	Ancienne ligne	Nouvelle ligne	Ancienne borne	Nouvelle borne
jusqu'à 7	27	4+18=22	4+10=14	2^{22}	2^{14}
jusqu'à 15	81	5+54=59	5+28=33	2^{59}	2^{33}
jusqu'à 31	243	6+162=168	6+82=88	2^{168}	2^{88}
jusqu'à 63	729	7+486=493	7+244=251	2^{493}	2^{251}

Source : élaboration des auteurs

Formule générale. Pour le niveau de référence $K_n = 2^n - 1$ ($n \geq 2$), le coefficient correspondant est $A = 3^n$, la distance utile vaut $3^{n-1} + 1$, et avec le départ de recherche à la ligne $n+1$, la nouvelle ligne majorante est $L_n(\text{opt}) = n + 2 + 3^{n-1}$, d'où la borne $D_n(\text{opt}) = 2^{(n+2+3^{n-1})}$.

Statut mathématique. Les valeurs locales $B = 4, 13, 40, 121$ et les premières distances ont été vérifiées dans la mécanique du tableau. Les récurrences $B_{n+1} = 3B_n + 1$ et $d_{n+1} = 3d_n - 2$, ainsi que les formes fermées qui en découlent, constituent la formulation de cette première optimisation ; la démonstration générale de la loi de distance devra être intégrée à la formalisation rigoureuse de la récurrence du TG, et n'est pas remplacée par une simple extrapolation numérique.

16.4. Récurrence de B — calcul détaillé de la partie B

Ce paragraphe détaille le calcul du premier terme apparaissant à chaque nouveau niveau de coefficient dans la partie B du §16.3.

Premier passage : $B_0 = 4$ vers $B_1 = 13$. Départ $9k + 4$. Comme 4 est pair, $k \mapsto 2k+1$: $9(2k+1)+4 = 18k+13$. Déplacement vers la droite (+1) : $18k+14$. Cousin normal : $18k+14 \mapsto 54k+26$. Division par 2 : $(54k+26)/2 = 27k+13$. Ainsi $B_0 = 4 \rightarrow B_1 = 13$, soit pair $\rightarrow$ impair.

Deuxième passage : $B_1 = 13$ vers $B_2 = 40$. Départ $27k + 13$. Comme 13 est impair, $k \mapsto 2k$: $27(2k)+13 = 54k+13$. Déplacement vers la droite : $54k+14$. Cousin normal vérifié : $54k+14 \mapsto$

$162k+80$. Division par 2 : $(162k+80)/2 = 81k+40$. Ainsi $B_1 = 13 \rightarrow B_2 = 40$, soit impair $\rightarrow$ pair.

Troisième terme vérifié. Pour le coefficient suivant, la constante obtenue est $B_3 = 121 : 4 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 121$.

Récurrence de B. Les trois transitions vérifiées donnent la même loi $B_{\{n+1\}} = 3B_n + 1$, avec $B_0 = 4$, fournissant 4, 13, 40, 121, 364, 1093, ..., avec $A_n = 9, 27, 81, 243, 729, 2187, \dots$ multiplié par 3 à chaque étape.

Tableau N°7 : Calcul détaillé de la récurrence de B (§16.4)

n	A_n	B_n	Parité de B_n
0	9	4	pair
1	27	13	impair
2	81	40	pair
3	243	121	impair
4	729	364	pair
5	2187	1093	impair

Source : élaboration des auteurs

Alternance de parité. La récurrence explique immédiatement l'alternance : si B_n est pair, $3B_n$ est pair et $3B_n + 1$ est impair ; si B_n est impair, $3B_n$ est impair et $3B_n + 1$ est pair. Ainsi B_n pair $\Rightarrow B_{\{n+1\}}$ impair, et B_n impair $\Rightarrow B_{\{n+1\}}$ pair, ce qui explique que les changements de variable alternent eux aussi : $k \mapsto 2k+1$ lorsque B est pair, puis $k \mapsto 2k$ lorsque B est impair, puis à nouveau $k \mapsto 2k+1$, etc.

Forme fermée. En posant $C_n = B_n + 1/2$, la récurrence $B_{\{n+1\}} = 3B_n + 1$ devient $C_{\{n+1\}} = 3C_n$, d'où $B_n = (9 \cdot 3^n - 1)/2 = (3^{n+2} - 1)/2 = (A_n - 1)/2$.

Résultat pour la première optimisation. On dispose ainsi des deux données nécessaires à la comparaison du §16.3 : sur la route choisie du côté couvert, $B = 1$ à chaque niveau ; dans la partie B, le premier terme apparaissant au niveau $A_n = 9 \cdot 3^n$ possède la constante $B_n = (A_n - 1)/2$.

16.5. Deuxième optimisation complète

Conservation du côté droit et nouvelle route optimisée du côté gauche.

La première optimisation (§16.3) remplaçait les boucles verticales complètes par une distance utile entre deux familles de même coefficient A. La deuxième optimisation conserve l'un des deux côtés et choisit une route plus favorable sur l'autre côté ; elle ne recherche pas l'optimum absolu, mais fournit une borne plus petite, simple et suffisante pour la suite du travail.

Côté droit conservé. Les constantes déjà obtenues lors de la première optimisation sont $4 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 121 \rightarrow 364 \rightarrow 1093 \rightarrow \dots$, vérifiant $B_{n+1} = 3B_n + 1$, $B_0 = 4$. Avec $A = 9 \cdot 3^n$, on a $B = (A-1)/2$.

Nouvelle route du côté gauche. La nouvelle route commence à $9k+1$, avec des changements de variable alternant $k \rightarrow 2k$, puis $k \rightarrow 2k+1$, puis $k \rightarrow 2k$, etc. Les calculs locaux donnent :

$$9k+1 \rightarrow 27k+22 \rightarrow 81k+13 \rightarrow 243k+202 \rightarrow \dots$$

Les constantes rencontrées sont donc $1 \rightarrow 22 \rightarrow 13 \rightarrow 202 \rightarrow 121 \rightarrow 1822 \rightarrow \dots$. Les passages vérifiés comprennent notamment $18k+2 \leftrightarrow 54k+44$, puis $54k+50 \leftrightarrow 162k+26$, et au rang suivant le parent commun $243k+162$ conduit au cousin $486k+404$, puis à $243k+202$ après division par 2.

Réurrence double des constantes. La nouvelle suite se sépare en deux sous-suites, $1 \rightarrow 13 \rightarrow 121 \rightarrow \dots$ et $22 \rightarrow 202 \rightarrow 1822 \rightarrow \dots$, qui vérifient toutes deux la même transformation $x \rightarrow 9x + 4$. Pour la suite complète $C_n : C_{n+2} = 9C_n + 4$.

Distance utile entre les deux côtés. Pour une colonne de coefficient A, la règle verticale reste $b \mapsto b/2$ si b est pair, $b \mapsto (A+b)/2$ si b est impair. On mesure la distance entre le côté droit conservé et la nouvelle route du côté gauche, en tenant compte de l'alternance du sens utile d'un rang au suivant :

Tableau N°8 : Réurrence double des constantes — deuxième optimisation (§16.5)

Coefficient A	Côté droit	Côté gauche optimisé	Distance utile	Boucle complète
27	13	22	6	18
81	40	13	18	54
243	121	202	54	162
729	364	121	162	486
2187	1093	1822	486	1458

Source : élaboration des auteurs

Les distances utiles 6, 18, 54, 162, 486, ... vérifient $d_{n+1} = 3d_n$, avec $d_0 = 6$; pour $K_n = 2^n - 1$, donc $A = 3^n$, on obtient $d_n = 2 \cdot 3^{n-2}$.

Effet sur les bornes de développement du TG. Avec la convention déjà fixée — la ligne 1 contient $3k+1$ et la ligne L correspond à 2^L colonnes — la ligne de départ associée à $K_n = 2^n - 1$ est $n+1$:

Tableau N°9 : Distances utiles entre les deux côtés — deuxième optimisation (§16.5)

Référence	A	Borne initiale	1 ^{re} optimisation	2 ^e optimisation	Gain sur 1 ^{re} opt.
jusqu'à 7	27	2^{22}	2^{14}	2^{10}	4 lignes
jusqu'à 15	81	2^{59}	2^{33}	2^{23}	10 lignes
jusqu'à 31	243	2^{168}	2^{88}	2^{60}	28 lignes
jusqu'à 63	729	2^{493}	2^{251}	2^{169}	82 lignes
jusqu'à 127	2187	2^{1466}	2^{738}	2^{494}	244 lignes

Source : élaboration des auteurs

Par exemple, pour couvrir jusqu'à 31, on passe de la borne initiale 2^{168} à 2^{88} avec la première optimisation, puis à 2^{60} avec la deuxième — un gain supplémentaire de 28 lignes, soit un facteur 2^{28} .

Formule générale. Pour $K_n = 2^n - 1$ ($n \geq 3$), le coefficient correspondant est $A = 3^n$, la distance utile vaut $2 \cdot 3^{n-2}$, et la recherche commence à la ligne $n+1$: la nouvelle ligne majorante est $L_n(\text{opt } 2) = n + 1 + 2 \cdot 3^{n-2}$, d'où la borne $D_n(\text{opt } 2) = 2^{(n+1+2 \cdot 3^{n-2})}$. Par rapport à la première optimisation $L_n(\text{opt } 1) = n + 2 + 3^{n-1}$, le gain supplémentaire sur l'exposant vaut $1 + 3^{n-2}$.

Statut mathématique. Cette deuxième optimisation conserve toutes les parties déjà établies du travail : seul le choix de route du côté gauche est modifié. Les passages locaux donnent les constantes 1, 22, 13, 202, 121, 1822, ... ; la récurrence $C_{n+2} = 9C_{n+4}$ et les distances 6, 18, 54, 162, 486, ... constituent la formulation retenue, jugée suffisante pour la suite du travail.

16.6. Perspectives d'autres optimisations

L'optimisation présentée aux §16.3–16.5 n'est qu'un premier choix parmi plusieurs possibles. Elle repose sur deux décisions particulières : le choix d'une route dans la partie déjà couverte du Tableau Générateur, et le choix d'un mode de recouvrement progressif de la partie restant à traiter.

Du côté qui fournit les familles déjà couvertes, d'autres routes pourraient être sélectionnées. Le choix effectué ici conduit à la constante particulièrement simple $B = 1$, mais rien n'impose a priori cette route : on pourrait rechercher systématiquement, parmi les routes disponibles à chaque rang fini, celle qui minimise la distance nécessaire pour rejoindre la famille à couvrir, afin de réduire encore la borne de développement du TG nécessaire à la démonstration.

Réciproquement, le schéma de couverture adopté ici — $3/4$, puis $7/8$, puis $15/16$, etc. — n'est pas nécessairement le seul possible. Il correspond à une stratégie très simple : à chaque étape, partager la partie restante et en absorber une nouvelle moitié. Mais la structure auto-similaire du TG permet d'envisager d'autres stratégies, par exemple choisir une route conduisant à la couverture certaine d'un bloc situé au milieu d'une région encore non traitée, puis recommencer sur d'autres blocs. On obtiendrait alors non plus nécessairement une couverture progressive de cette forme, mais une couverture composée de plusieurs blocs disjoints dont la réunion augmenterait à chaque rang. Certains de ces blocs pourraient même entraîner, par les relations de copie et d'héritage déjà établies dans le TG (§16.1), la couverture de régions supplémentaires que l'on n'avait pas explicitement demandées.

Il faut donc distinguer deux directions d'optimisation complémentaires : optimiser les routes permettant de diminuer la borne nécessaire, et optimiser le choix des blocs à couvrir afin d'obtenir le recouvrement le plus efficace. La première optimisation réalisée ici (§16.3) constitue seulement un exemple particulièrement simple, calculable et contrôlable de cette méthode générale.

Autrement dit, on n'a pas cherché ici l'optimum du Tableau Générateur : on a seulement montré qu'une première stratégie très élémentaire permet déjà de remplacer une majoration fondée sur des boucles complètes par une majoration sensiblement plus petite. D'autres choix de routes et d'autres géométries de recouvrement pourront être étudiés ultérieurement, toujours à rang fini.

16.7. Éléments vers la formalisation de la récurrence structurelle

Cette section consigne plusieurs résultats obtenus en poursuivant la formalisation demandée aux §16.2 et §16.5. Deux points sont désormais établis rigoureusement pour tout rang ; un troisième reste à l'état d'observation empirique forte, dont on montre qu'elle suffirait à conclure si elle était démontrée.

16.7.1. La descente verticale est une multiplication par l'inverse de 2 (démontré)

Pour toute colonne d'expression $Ak+b$ avec A impair, la règle $T_A(b) = b/2$ si b pair, $T_A(b) = (A+b)/2$ si b impair (§15.9) coïncide exactement, dans les deux cas, avec

$$T_A(b) \equiv b \cdot 2^{-1} \pmod{A},$$

où 2^{-1} désigne l'inverse de 2 modulo A . Cette identité se vérifie directement sur les deux branches de la définition et ne dépend d'aucune hypothèse supplémentaire.

16.7.2. La longueur de boucle $M_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ est démontrée pour tout n

Le §16.2 établissait $M_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (longueur de la boucle verticale au coefficient 3^n) par vérification directe pour les premiers niveaux (6, 18, 54, ...). Ce résultat se déduit maintenant, pour tout n , d'un théorème classique : **2 est racine primitive modulo 3^n pour tout $n \geq 1$** (conséquence du lemme LTE — *Lifting The Exponent* — appliqué à $v_3(2^{2 \cdot 3^{n-1}} - 1)$). Puisque 2^{-1} engendre alors la totalité du groupe $(\mathbb{Z}/3^n\mathbb{Z})^*$, l'orbite de tout résidu b sous T_A parcourt nécessairement l'intégralité des $2 \cdot 3^{n-1}$ classes non multiples de 3 avant de reboucler. La borne M_n cesse ainsi d'être une vérification cas par cas : c'est un résultat démontré pour tout n .

16.7.3. Le mécanisme vertical standard, confirmé sur la Figure 4

En reprenant explicitement le mécanisme illustré par la Figure 4 (changement de variable, puis déplacement de 0 ou ± 1 selon la parité de $A+b$, puis application de $\div 2$ ou $\times 3/2$), on vérifie que ce mécanisme, appliqué à une cellule-frontière $Ak+A$, redonne exactement $3Ak+3A$ au niveau suivant. Ce point démontre — et non plus seulement observe — la reproduction de la cellule de raccord $Ak+A$ à chaque ligne du Tableau Générateur, confirmée par ailleurs sur les sept premières lignes construites (§16.7.4).

16.7.4. La récurrence des constantes B : une formule fermée pour le saut « cousin », vérifiée mais non démontrée

En examinant systématiquement les sauts « cousin » ($Ak+b \rightarrow 3Ak+c$, coefficient multiplié par 3) apparaissant dans les Tableaux Générateurs construits à 7 puis 8 lignes, on observe que l'écart $\Delta = c - 3b$ ne dépend, sur la route suivie par la chaîne $B_0=4, B_1=13, B_2=40, \dots$ (§16.3-16.4), que du rang n et obéit exactement à

$$\Delta_n = (9 \cdot (-3)^n - 5) / 2, \text{ soit } \Delta_{n+1} = -3\Delta_n - 10, \Delta_0 = 2,$$

vérifiée sans exception sur les cinq transitions disponibles ($n = 0$ à 4) dans les tableaux construits.

Conditionnel à cette formule, on démontre algébriquement que $B_{\{n+1\}} = (A_{\{n+1\}} - 1)/2$ découle de $B_n = (A_n - 1)/2$ pour les deux parités de B_n , en substituant $\Delta_{\{n+1\}}$ dans le mécanisme de passage décrit au §16.4 : les deux cas (B_n pair, B_n impair) donnent tous deux $3(B_n \text{ ou } A_n + B_{n+1}) + \Delta_{\{n+1\}} = 2 \cdot 3^{n+3} - 2$, soit exactement $B_{\{n+1\}} = (3^{n+3} - 1)/2$. La formule fermée de B_n cesse donc d'être une extrapolation à partir de quatre valeurs si Δ_n est établie pour tout n .

Ce qui reste ouvert : l'origine géométrique de Δ_n dans la construction du Tableau Générateur. Une tentative de la retrouver en composant deux fois le mécanisme vertical standard du §16.7.3 ne reproduit pas le saut $\times 3$ observé (elle produit un B différent de celui de la chaîne réelle) ; une recherche de corrélation entre Δ_n et la position géométrique (colonne) des cellules concernées n'a pas non plus abouti à une règle à une seule variable. Le saut « cousin » semble donc relever d'un mécanisme distinct du passage vertical ligne-à-ligne — probablement lié aux relations entre cousins de type I et de type P évoquées au §12, pour lesquelles l'article ne donne, à ce stade, que des exemples calculés et non une formule générale. La suite du §16.7.5 apporte un éclairage nouveau sur la nature de cette relation.

16.7.5. Cousins : une définition généalogique

Les cousins I et P du §12 (I = impair, P = pair) reçoivent ici une interprétation structurelle directe : deux familles sont cousines lorsqu'elles sont, au sens généalogique usuel, les enfants de deux parents eux-mêmes frères dans l'arbre du Tableau Générateur — exactement comme deux cousins humains ont des parents qui sont frères ou sœurs l'un de l'autre, sans être eux-mêmes parent et enfant.

Formule démontrée pour deux enfants d'un même parent (frères). Soit un nœud A_{k+b} (A impair). Ses deux enfants sont A_{k+b_P} (branche paire, $\div 2$) et $3A_{k+b_I}$ (branche impaire, $\times 3/2$), au sens du §16.7.3. En notant $\Delta_{\text{frères}} = b_I - 3b_P$, le calcul direct donne, dans les deux cas de parité de b :

$$\Delta_{\text{frères}} = (3/2)(A + 1),$$

indépendamment de b . Cette formule est vérifiée exactement sur trois parents distincts lus directement dans les Figures 2 et 3 : $3k+3 \rightarrow (3k+1, 9k+9)$ donne $\Delta=6=(3/2)(3+1)$; $9k+9 \rightarrow (9k+4, 27k+27)$ donne $\Delta=15=(3/2)(9+1)$; $27k+27 \rightarrow (27k+13, 81k+81)$ donne $\Delta=42=(3/2)(27+1)$ — ce dernier cas coïncidant avec l'exemple de cousins impairs $27k+13 \leftrightarrow 81k+81$ déjà rencontré.

Application à un exemple de cousins. $9k+3$ (enfant impair de $3k+1$) et $27k+27$ (enfant impair de $9k+9$) sont cousins au sens généalogique précis : leurs parents $3k+1$ et $9k+9$ sont eux-mêmes frères, tous deux enfants de $3k+3$. La relation « cousins de type I » du §12.1 correspond ainsi à la comparaison entre les enfants impairs de deux parents frères.

Une exception confirmée au nœud $3k+1$. L'application directe de la Figure 3 au nœud $3k+1$ fait apparaître une inversion : la substitution $k=2k'$ (normalement associée à $\div 2$) y mène à $\times 3/2$, et la substitution $k=2k'+1$ (normalement associée à $\times 3/2$) y mène à $\div 2$ — l'inverse de ce qui est observé pour tous les autres nœuds vérifiés ($3k+3$, $9k+9$, et les quatre racines de la Figure 4). Les enfants réels de $3k+1$ ($3k+2$ et $9k+3$) ne suivent donc pas la formule $\Delta_{\text{frères}}$ ci-dessus telle quelle.

$3k+1$ étant précisément le représentant canonique de départ de la réduction du §9, l'hypothèse retenue est que **tout représentant canonique, au sens du §9, reçoit ce même traitement inversé la première fois qu'il se ramifie** — $3k+1$ n'en étant que la première occurrence. Le mécanisme « $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ » des §9.6-9.7, qui décrit l'émergence de nouveaux représentants canoniques en profondeur dans l'arbre, fournirait alors d'autres nœuds où cette inversion devrait se vérifier. Cette hypothèse n'est pas encore vérifiée sur un second représentant canonique ; elle constitue la prochaine étape naturelle de ce travail, et relierait pour la première fois la mécanique du Tableau Générateur (§11-16) à la théorie des représentants canoniques (§9).

16.7.6. Origine de la couverture progressive : une distribution 2-adique, pas encore une preuve

En cherchant à vérifier directement, par la dynamique de Syracuse brute, la relation entre une famille A_{k+b} et l'enfant calculé au §16.7.3, on observe qu'une fraction seulement des entiers k de la famille se connecte à l'enfant en une seule étape MSP². Le reste ne relève pas d'une erreur de construction : la proportion exacte de k pour lesquels $v_2(3n+1) = j$ (n parcourant la famille considérée) suit la distribution

$$P(v_2(3n+1) = j) = 2^{-(j)}, j = 1, 2, 3, \dots$$

vérifiée numériquement sur 2000 valeurs de la famille $9k+2$ (50,00 % / 25,00 % / 12,50 % / 6,25 % / 3,15 % / 1,55 %... pour $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), en accord avec la distribution théorique à moins de 0,05 point près à chaque palier. Ce fait est un résultat standard de théorie des nombres élémentaire (la valuation 2-adique d'une forme linéaire de type $3n+1$, lorsque n parcourt une

progression arithmétique, suit exactement cette loi géométrique) et ne dépend d'aucune hypothèse propre à MSP².

Le lien avec le §16.2. La suite $1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \dots$ utilisée pour établir la couverture progressive du Tableau Générateur est exactement la suite des sommes partielles de cette même distribution géométrique ($1/2$, puis $+1/4$, puis $+1/8$, ...). Le fait qu'une fraction $2^{(-j)}$ seulement des cas nécessite j niveaux supplémentaires de descente dans l'arbre n'est donc pas une observation isolée : c'est la même loi qui, appliquée niveau par niveau, produit la suite de couverture déjà utilisée au §16.2. Ce résultat fournit un fondement de théorie des nombres à la forme de cette suite, jusqu'ici seulement observée sur le tableau construit.

Ce que ce résultat ne fournit pas. Une distribution sur l'ensemble d'une famille ne garantit rien sur un entier N particulier : savoir qu'une fraction $2^{(-j)}$ des k nécessite une profondeur j ne dit pas, pour un N fixé, à quelle profondeur exacte il se résout, ni que cette profondeur est finie pour ce N précis — c'est précisément l'objet de la conjecture de Syracuse elle-même, et non une conséquence qu'on puisse en déduire. Cet écart entre un résultat *statistique* (vrai pour presque tous les cas, ou en moyenne) et une preuve *individuelle* (vraie pour chaque entier, sans exception) est exactement celui sur lequel butent les résultats de densité existants dans la littérature, y compris les plus avancés : ils établissent que « presque toute » trajectoire se comporte comme attendu, sans conclure sur la totalité des entiers. La distribution 2-adique établie ici est donc une clarification structurelle utile — elle explique pourquoi la suite de couverture du §16.2 prend la forme qu'elle prend — mais elle ne constitue pas, et ne doit pas être présentée comme constituant, une étape supplémentaire vers une preuve inconditionnelle de la borne de couverture pour tout n .

16.8. Non-vacuité du résidu à profondeur finie et minoration explicite (piste de renforcement)

Ce paragraphe complète le §16.2 sur un point resté implicite : la fraction couverte $1/2, 3/4, 7/8, \dots$ ne peut, à aucune profondeur finie, valoir exactement 1, et la conclusion du §16.2 ne peut donc pas reposer sur cette seule fraction. On isole ici le lemme général qui explique ce fait, puis on démontre une minoration explicite qui, sous une identification structurelle restant à établir dans le TG, permettrait de fermer ce point pour les premiers niveaux du §16.3.

Lemme (non-vacuité du résidu). Soit une construction qui scinde une classe résiduelle $\{Ak+B : k \in \mathbb{Z}\}$ en deux sous-classes d'indice 2 à chaque étape, sans jamais en éliminer aucune.

Alors, pour toute profondeur finie L , la classe restée systématiquement non couverte est un unique résidu modulo 2^L , donc une progression arithmétique infinie : elle n'est jamais vide.

Démonstration. Immédiat par construction : chaque étape remplace une classe résiduelle par deux classes filles, sans supprimer aucun entier de $\mathbb{Z}$; après L étapes, la classe restée non couverte est un résidu unique modulo 2^L , qui contient une infinité d'entiers. ■

Conséquence pour le §16.2. La fraction $1/2, 3/4, 7/8, \dots$ ne peut donc jamais atteindre 1 à profondeur finie ; la couverture de $\{2, \dots, K_m\}$ ne peut se déduire de cette seule fraction. Ce qu'il faut à la place, c'est que le plus petit représentant positif du résidu non couvert à la profondeur choisie dépasse K_m — auquel cas aucun entier de $\{2, \dots, K_m\}$ ne peut s'y trouver, et la couverture de cette tranche finie reste acquise, entier par entier, indépendamment du fait que le résidu lui-même ne soit jamais vide.

Proposition (minoration du résidu B, aux niveaux du §16.3). Pour tout $m \geq 2$, $B_{m-2} = (3^m - 1)/2 > K_m = 2^m - 1$, où B_{m-2} est la constante calculée au §16.3–16.4 pour le coefficient $A = 3^m$. L'écart croît exponentiellement : $B_{m-2}/K_m \sim (3/2)^m$.

Démonstration. On montre $3^m > 2^{m+1} - 1$ par récurrence. *Initialisation ($m=2$).* $3^2 = 9 > 2^3 - 1 = 7$. *Hérédité.* Si $3^m > 2^{m+1} - 1$, alors $3^{m+1} = 3 \cdot 3^m > 3(2^{m+1} - 1) = 2^{m+2} + 2^{m+1} - 3 \geq 2^{m+2} - 1$, car $2^{m+1} - 3 \geq -1$ dès que $m \geq 1$. ■

Portée et point ouvert. Cette proposition est acquise inconditionnellement : c'est un résultat arithmétique fermé sur les deux suites B_{m-2} et K_m déjà définies au §16.3. Elle ne referme pas à elle seule le §16.2 : il resterait à établir que B (telle que calculée au §16.3–16.4) est bien le plus petit représentant de la classe résiduelle non couverte à ce niveau du TG — une identification structurelle entre la « route B » du §16.3 et le résidu du lemme ci-dessus, qui n'est pas encore explicitée dans le texte. Si cette identification est confirmée sur la construction du TG, la démonstration pourrait procéder par le même schéma que le §9.9–9.11 (croissance d'un point bloquant au-delà de toute borne finie), transposé ici des représentants canoniques aux classes résiduelles du Tableau Générateur.

16.9. Fonctionnement récursif du tableau et mécanisme de recouvrement (note de travail)

Cette note formalise le mécanisme décrit pour la construction du Tableau Générateur (TG), en particulier l'évolution de sa dernière colonne paire, puis l'argument de rattrapage qui explique pourquoi un niveau fixé peut être recouvert après un nombre fini de lignes.

16.9.1. Construction d'un niveau du Tableau Générateur

On part, par exemple, de la famille $3k+1$. Pour le passage considéré, on effectue le changement de variable $k \rightarrow 2k$. On obtient $6k+1$, puis le déplacement vers la droite ajoute 1 :

$$3k+1 \rightarrow 6k+1 \rightarrow 6k+2$$

Le raccord correspondant conduit à $18k+8$, puis la division par 2 donne :

$$18k+8 \rightarrow 9k+4$$

On atteint ainsi, au niveau suivant, la famille $9k+4$. Ce passage illustre la règle récursive qui apparaît sur la dernière colonne paire.

16.9.2. Évolution de la dernière colonne paire

À chaque augmentation d'un cran du tableau, le coefficient de k de la dernière colonne paire est multiplié par 3. Simultanément, la constante reçoit l'ancien coefficient de k .

$$Ak+B \rightarrow 3Ak+(A+B)$$

La suite obtenue est donc :

$$3k+1 \rightarrow 9k+4 \rightarrow 27k+13 \rightarrow 81k+40 \rightarrow 243k+121 \rightarrow 729k+364 \rightarrow \dots$$

Les constantes se construisent en ajoutant successivement les coefficients précédents :

$$1 ; 1+3=4 ; 4+9=13 ; 13+27=40 ; 40+81=121 ; 121+243=364 ; \dots$$

Autrement dit, les ajouts successifs sont 3, 9, 27, 81, 243, 729, ..., tandis que le coefficient de k suit 3, 9, 27, 81, 243, 729, Sur cette branche, on retrouve également $B=(A-1)/2$.

16.9.3. Doublement du tableau

Chaque fois que l'on augmente le Tableau Générateur d'un cran, deux évolutions ont lieu en même temps :

- le nombre de lignes augmente de 1 ;
- le nombre de colonnes est doublé.

$$T_n \rightarrow T_{n+1} : +1 \text{ ligne et } \times 2 \text{ colonnes}$$

La dernière colonne paire, elle, change de famille suivant la multiplication par 3 du coefficient : $3k \rightarrow 9k \rightarrow 27k \rightarrow 81k \rightarrow \dots$. Il faut donc distinguer la croissance du bord du tableau, gouvernée par 3, de l'extension du mécanisme de couverture, gouvernée par le doublement.

16.9.4. Familles présentes à coefficient fixé

Une fois un coefficient atteint, il reste fixé pendant le parcours de la colonne correspondante. Ce sont alors les constantes B qui parcourent cycliquement les valeurs admissibles, c'est-à-dire les valeurs non multiples de 3.

Exemple pour le coefficient 9 :

9k+1, 9k+2, 9k+4, 9k+5, 9k+7, 9k+8

Il y a 6 constantes admissibles. Pour le coefficient 27, on obtient les 18 valeurs comprises entre 1 et 26 qui ne sont pas multiples de 3. Plus généralement, pour $A=3^n$, le nombre de constantes admissibles est :

$$2 \cdot 3^{n-1}$$

16.9.5. Mécanisme de rattrapage et de recouvrement

Lorsqu'un nouveau niveau est créé, le coefficient de la famille frontière est multiplié par 3, alors que le tableau ne double que son nombre de colonnes. Il existe donc, au moment de la création du nouveau niveau, un retard naturel du mécanisme de couverture : après deux créations successives, par exemple, le coefficient a été multiplié par 9 tandis que la taille en colonnes n'a été multipliée que par 4.

Le point essentiel est qu'une fois le niveau $A=3^n$ atteint, ce coefficient peut être considéré comme fixé pendant que les constantes B de ce niveau sont parcourues. Le niveau ne continue donc pas à « fuir » en étant multiplié par 3 à chaque ligne de traitement.

niveau fixé : 3^n / couverture poursuivie : 2^r

Pendant ce temps, le mécanisme de couverture peut continuer à progresser par doublements. Pour tout niveau fixé 3^n , il existe toujours un entier fini r tel que :

$$2^r > 3^n$$

Ainsi, le facteur 3 peut créer une avance au moment où un nouveau niveau apparaît, mais cette avance est finie. Dès que le coefficient du niveau est figé, une progression qui continue par puissances de 2 finit nécessairement par le rattraper.

16.9.6. Formulation de l'argument de couverture

Le mécanisme peut donc être formulé ainsi : le Tableau Générateur crée successivement des niveaux de coefficient 3^n . À chaque niveau, les constantes admissibles B sont parcourues sans

que le coefficient 3^n change. Le mécanisme de couverture continue, lui, à s'étendre. Par conséquent, pour chaque niveau fixé, il existe un nombre fini de lignes supplémentaires suffisant pour que la portée de couverture rattrape ce niveau.

Pour tout n fixé, il existe $r(n) < \infty$ tel que le niveau 3^n puisse être rattrapé par la couverture.

Pour transformer cette description en démonstration complète du recouvrement, il faut associer explicitement ce rattrapage numérique au fait que toutes les constantes admissibles B du niveau fixé sont effectivement parcourues et couvertes par les règles du TG. Le mécanisme de croissance, lui, montre qu'un niveau fixé ne peut pas rester indéfiniment hors de portée d'une couverture qui continue à doubler.

16.9.7. Résumé

Tableau N°10 : Résumé du mécanisme récursif du Tableau Générateur (§16.9.7)

Élément	Évolution
Nombre de lignes	+1 à chaque cran
Nombre de colonnes	$\times 2$ à chaque cran
Coefficient A de la dernière colonne paire	$\times 3$
Constante B sur cette branche	$B \rightarrow B+A$
Suite de la dernière colonne paire	$3k+1, 9k+4, 27k+13, 81k+40, \dots$
À coefficient $A=3^n$ fixé	B parcourt les classes non multiples de 3
Principe de rattrapage	3^n est fixé tandis que 2^r peut continuer à croître

Source : élaboration des auteurs

17. Types particuliers de vols

17.1. Vol en feuilles mortes — Vol à Enzo

Le vol en feuilles mortes est organisé par numéro de colonne, et non par famille modulo 6. On descend jusqu'au premier terme de la colonne considérée, puis on applique le processus propre à cette colonne.

Pour la colonne 2, on applique directement le vol en feuilles mortes. Pour la colonne 3, on descend jusqu'au premier terme de la colonne puis on applique une fois MSP^2 dans le sens normal ; on rejoint alors le niveau permettant de poursuivre le mécanisme par la colonne précédente. Le même principe se prolonge de colonne en colonne.

Un exemple de trajectoire utilisé dans l'étude est $15 \rightarrow 53 \rightarrow 13 \rightarrow 5$. Le profil alterne descentes de colonne et déplacements imposés par MSP^2 , donnant l'image d'une feuille morte qui descend puis est déplacée avant de reprendre sa descente.

17.2. Vol à Papoucha

Soit N un entier impair différent de 1. On écrit

$$N + 1 = 2^i u, u \text{ impair}, i \geq 1.$$

Après une étape impaire MSP^2 suivie de l'étape paire associée, le mécanisme étudié fait évoluer les facteurs selon :

$$2^i \rightarrow 2^{i-2}, u \rightarrow 3u.$$

Tant que $i > 2$, le processus se poursuit régulièrement : l'exposant de 2 diminue de deux unités et le facteur impair est multiplié par 3. Les cas limites sont $i=2$ et $i=1$.

17.2.1. Correcteur d'altitude de Stroina

Pour $i=2$, le correcteur n'est pas une recherche arbitraire. La puissance de 2 par laquelle le terme doit être divisé est déterminée par sa classe dyadique. La répartition est connue : un terme sur deux relève de $\div 2$, un sur quatre de $\div 4$, un sur huit de $\div 8$, un sur seize de $\div 16$, et ainsi de suite.

Tableau N°11 : Correcteur d'altitude de Stroina (§17.2.1)

Proportion	Correction
1/2	$\div 2$
1/4	$\div 4$
1/8	$\div 8$
1/16	$\div 16$
...	...

Source : élaboration des auteurs

Pour $i=1$, la poursuite formelle introduirait $2^{-1}=1/2$. Le correcteur est alors simplement une multiplication par 2, qui rétablit une expression entière. Le correcteur d'altitude de Stroina est donc un sous-mécanisme déterministe du Vol à Papoucha.

18. Perspectives

18.1. Régularités encore à formaliser

L'étude n'épuise pas la structure mise en évidence. De nombreux chemins, ramifications et régularités restent à explorer ou à formaliser. Le présent article s'est volontairement limité aux propriétés utiles à son objectif principal.

18.2. Extension aux rationnels

Rien n'interdit formellement de prolonger certaines branches au-delà de l'intégralité et d'étudier les antécédents rationnels. Les troncs et les branches pourraient alors être poursuivis dans les deux directions, donnant une extension rationnelle des arbres MSP².

18.3. Étude géométrique

La construction peut être étudiée comme un objet géométrique : droites et segments pour les troncs et les branches, progressions exponentielles linéarisées par un choix de coordonnées, changements d'échelle et autosimilarités. Cette lecture géométrique pourrait révéler des invariances moins visibles dans l'écriture arithmétique.

18.4. Extension aux nombres complexes

Une direction plus générale consisterait à examiner des transformations analogues dans le domaine complexe. Il s'agirait alors d'une extension de la dynamique et non d'un résultat nécessaire à l'étude des entiers positifs.

Ces quatre directions sont des perspectives de recherche et non des résultats démontrés dans le présent article.

19. Extension aux entiers négatifs

Le cadre MSP² s'étend aux entiers impairs négatifs par un opérateur MSP²⁻ défini par :

$U_{n+1} = U_n/2$ si U_n est pair ; $U_{n+1} = -(3(|U_n|-1)/2 + 1)$ si U_n est impair.

En appliquant à MSP²⁻ les mêmes règles et le même raisonnement que ceux développés pour MSP² sur les entiers positifs (§2 à §9), on constate que tous les entiers négatifs testés se stabilisent dans l'une des trois boucles suivantes :

- $-17 \rightarrow -25 \rightarrow -37 \rightarrow -55 \rightarrow -82 \rightarrow -41 \rightarrow -61 \rightarrow -91 \rightarrow -136 \rightarrow -68 \rightarrow -34 \rightarrow -17$ (boucle de longueur 11) ;
- $-5 \rightarrow -7 \rightarrow -10 \rightarrow -5$ (boucle de longueur 3) ;

- $-1 \rightarrow -1$ (point fixe).

Les résultats structurels établis pour les entiers positifs — classification par familles, construction des arbres inverses, périodicités, Tableau Générateur — s'adaptent directement au domaine négatif par le changement de signe dans la définition de MSP^{2-} . Cette extension n'est pas développée ici dans le même détail que le cas positif ; elle est présentée comme un résultat observé et une direction de travail complémentaire aux perspectives du §18.

20. Conclusion générale

MSP^2 fournit une représentation regroupée des trajectoires de Syracuse, organisée autour des cycles impair-vers-impair. Les deux familles $6q+1$ et $6q-1$ conduisent à des arbres inverses dont les feuilles, les périodes et les reproductions peuvent être étudiées algébriquement et géométriquement. Le Tableau Générateur complète cette représentation en codant les changements de variables, les parités, les relations entre cousins et l'évolution des familles A_k+B .

Le travail met ainsi en place un langage commun — cycles, arbres, feuilles, racines, murs, cousins, colonnes et vols — permettant de décrire de manière structurée les trajectoires et leurs régularités. Les prolongements rationnels, géométriques et complexes sont laissés à des travaux ultérieurs.

État de la démonstration. Les résultats des §2 à §9 (définition de MSP^2 , exhaustivité des deux arbres, réduction aux représentants canoniques) et des §11 à §15 (construction et propriétés du Tableau Générateur, triangles) sont établis par récurrence explicite. La borne de couverture du §16 est démontrée sous la forme d'une première majoration finie puis de deux optimisations successives ; la longueur de boucle M_n qui la sous-tend est désormais établie pour tout n (§16.7.2, via la primitivité de 2 modulo 3^n), de même que le mécanisme vertical standard et la reproduction de la cellule de raccord A_k+A à chaque ligne (§16.7.3). La relation « cousin » entre deux frères d'un même parent est maintenant démontrée sous forme close, $\Delta_{\text{frères}}=(3/2)(A+1)$ (§16.7.5), et explique structurellement les cousins de type I et P du §12 comme des enfants de parents frères. Le dernier maillon — le traitement inversé du représentant canonique $3k+1$ lors de sa première ramification, dont on conjecture qu'il s'étend à tout représentant canonique du §9 — reste une hypothèse non encore vérifiée sur un second cas, et c'est d'elle que dépend la formule fermée du saut « cousin » Δ_n utilisée aux §16.3-16.5 pour établir $B_n=(A_n-1)/2$ pour tout n . Le §16.7.6 établit par ailleurs que la suite de couverture $1/2, 3/4, 7/8, 15/16\dots$ du §16.2 est la somme partielle d'une distribution 2-adique

standard, ce qui en clarifie l'origine structurelle sans en faire une démonstration inconditionnelle : un résultat de distribution, valable sur l'ensemble d'une famille ou en moyenne, ne garantit rien pour un entier N particulier, et c'est précisément cet écart entre « presque tout » et « tout » qui limite aussi les résultats de densité existant dans la littérature sur cette conjecture. Tant que ce dernier point n'est pas verrouillé, l'ensemble ne constitue pas encore une démonstration inconditionnelle de la conjecture de Syracuse pour tous les entiers positifs, mais un cadre structurel resserré, dans lequel une seule brique bien identifiée reste à poser.

Remerciements

Pour Mazzoni Enzo :

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma mère, Inès de Sousa Pereira, pour sa patience infinie et son soutien logistique exceptionnel constant tout au long de cette étude. Sa confiance en moi a été une source de motivation essentielle dans les moments de doute. J'adresse également mes sincères remerciements à Hubert Depagne pour son accompagnement, ses encouragements et sa présence tout au long de ce parcours exigeant. Leur soutien indéfectible a joué un rôle déterminant dans l'aboutissement de ce travail.

Pour Sousa Pereira Mario :

Je remercie tous les professeurs qui m'ont dit qu'un problème bien posé est à 50 % résolu.

Annexe A. Tableau Générateur — reconstruction complète sur 8 niveaux

Cette annexe reproduit intégralement le Tableau Générateur tel que construit à la main sur 8 niveaux, en conservant les conventions de couleur et les doubles numérotations de la construction originale. Les niveaux 1 à 6 (jusqu'à 32 familles) sont présentés sous forme d'arbre ; les niveaux 7 et 8 (64 puis 128 familles), trop denses pour un arbre lisible, sont donnés sous forme de tableaux, dans le même ordre de gauche à droite.

Convention de couleur : le texte de chaque famille reprend la couleur de branche d'origine (bleu clair / gris pour une première entrée, bleu foncé / noir pour une entrée de suite, selon le côté $\div 2$ ou $\times 3/2$). Un fond vert clair signale une famille couverte (nombre de départ supérieur à la valeur calculée). Le repère rouge en italique, quand il est présent, donne la numérotation linéaire alternative du même nombre de départ.



Figure N°5 : Tableau Générateur — reconstruction manuscrite, niveaux 1 à 6

Annexe A.1. Niveau 7 (64 familles)

Tableau N°12 : Tableau Générateur — reconstruction complète, niveaux 1 à 6 (Annexe A)

3k+1 . 64k+21	6k+2	18k+8	9k+9	9k+1 . 64k+5	18k+2	54k+44	27k+18
9k+2 . 64k+13	18k+12	54k+20	27k+21	27k+13 . 64k+29	54k+14	162k+80	81k+81
9k+7 . 64k+49	18k+8	54k+8	27k+9	27k+1 . 64k+1	54k+2	162k+44	81k+45
27k+11 . 64k+25	54k+12	162k+74	81k+75	81k+13 . 64k+9	162k+14	486k+404	243k+162
9k+5 . 64k+35	18k+6	54k+2	27k+3	27k+22 . 64k+51	54k+50	162k+26	81k+27
27k+5 . 64k+11	54k+6	162k+56	81k+57	81k+76 . 64k+59	162k+158	486k+350	243k+108
27k+10 . 64k+23	54k+38	162k+152	81k+72	81k+10 . 64k+7	162k+92	486k+152	243k+153
81k+20 . 64k+15	162k+102	486k+182	243k+183	243k+121 . 64k+31	486k+122	1458k+728	729k+729

Source : élaboration des auteurs

Annexe A.2. Niveau 8 (128 familles)

Tableau N°13 : Tableau Générateur — niveaux 7 et 8, 64 et 128 familles (Annexe A.1–A.2)

3k+2 . 128k+85	6k+6	18k+2	9k+3	9k+4 . 128k+53	18k+14	54k+26	27k+27
-------------------	------	-------	------	-------------------	--------	--------	--------

9k+5 . 128k+69	18k+6	54k+2	27k+3	27k+22 . 128k+101	54k+50	162k+26	81k+27
9k+1 . 128k+13	18k+2	54k+44	27k+18	27k+10 . 128k+45	54k+38	162k+152	81k+72
27k+20 . 128k+93	54k+48	162k+20	81k+21	81k+40 . 128k+61	162k+122	486k+242	243k+243
9k+8 . 128k+113	18k+18	54k+38	27k+12	27k+4 . 128k+17	54k+32	162k+134	81k+54
27k+14 . 128k+65	54k+42	162k+2	81k+3	81k+22 . 128k+33	162k+104	486k+188	243k+189
27k+19 . 128k+89	54k+20	162k+98	81k+18	81k+37 . 128k+57	162k+38	486k+476	243k+234
81k+47 . 128k+73	162k+48	486k+20	243k+21	243k+202 . 128k+105	486k+446	1458k+242	729k+243
9k+7 . 128k+99	18k+8	54k+8	27k+9	27k+1 . 128k+3	54k+2	162k+44	81k+45
27k+11 . 128k+51	54k+12	162k+74	81k+75	81k+13 . 128k+19	162k+14	486k+404	243k+162
27k+16 . 128k+75	54k+44	162k+8	81k+9	81k+28 . 128k+43	162k+110	486k+206	243k+207
81k+38 . 128k+59	162k+120	486k+236	243k+237	243k+175 . 128k+91	486k+176	1458k+890	729k+162
27k+5 . 128k+23	54k+6	162k+56	81k+57	81k+76 . 128k+119	162k+158	486k+350	243k+108
81k+5 . 128k+7	162k+6	486k+380	243k+138	243k+76 . 128k+39	486k+320	1458k+1322	729k+594
81k+10 . 128k+15	162k+92	486k+152	243k+153	243k+91 . 128k+47	486k+92	1458k+638	729k+639
243k+182 . 128k+95	486k+426	1458k+182	729k+183	729k+364 . 128k+63	1458k+1094	4374k+2186	2187k+2187

Source : élaboration des auteurs